

Bachelorarbeit

«Modellierung und Simulation von
Konvektionsströmungen im äußeren Erdkern mit
der Methode der finiten Elemente»

vorgelegt von:

Berkant F. Turan 353132

Hochschullehrer: Prof. Dr. rer. nat. habil. W. H. Müller

Betreuer: S. Glane, M.Sc.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und eigenhändig sowie ohne unerlaubte fremde Hilfe und ausschließlich unter Verwendung der aufgeführten Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Ort, Datum

Berkant F. Turan

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
2. Grundlagen der Kontinuumstheorie	4
2.1. Satz von GAUSS	4
2.2. Transporttheorem für materielle Volumina	5
2.3. Massenbilanz	6
2.4. Impulsbilanz	7
2.5. Bilanz der Energie	9
3. Physikalische Modellierung	12
3.1. Materialgleichungen	12
3.1.1. NAVIER-STOKES-Materialgleichung	12
3.1.2. FOURIERSches Wärmeleitungsgesetz	13
3.1.3. Thermische Ausdehnung	14
3.1.4. BOUSSINESQ-Approximation	15
3.1.5. Kalorische Zustandsgleichung	16
3.2. Feldgleichungen	16
3.2.1. NAVIER-STOKES-Gleichung	16
3.2.2. Feldgleichung für die Temperatur	17
3.3. Entdimensionalisierung	19
3.3.1. Dimensionslose NAVIER-STOKES-Gleichung	19
3.3.2. Dimensionslose Feldgleichung für die Temperatur	20
4. Numerische Behandlung	22
4.1. Schwache Formulierung	22
4.1.1. Schwache Formulierung der Impulsbilanz	22
4.1.2. Schwache Formulierung der Feldgleichung für die Temperatur	24
4.2. Zeitdiskretisierung	25
4.2.1. IMEX-Verfahren 2. Ordnung	26
4.2.2. Zeitdiskretisierung der Impulsbilanz	27
4.2.3. Zeitdiskretisierung der Feldgleichung für die Temperatur	28
4.3. Numerische Methoden zur Lösung von nichtlinearen Gleichungssystemen	29
4.3.1. NEWTON-RAPHSON-Verfahren	29
4.3.2. PICARD-Iteration	30

5. Numerische Berechnung von Beispielproblemen	32
5.1. Stationäre Nischenströmung	32
5.1.1. Problembeschreibung	32
5.1.2. Schwache Formulierung	34
5.1.3. Ergebnisse und Diskussion	34
5.2. Instationäre KÁRMÁnsche-Wirbelstraße	37
5.2.1. Problembeschreibung	38
5.2.2. Schwache und zeitdiskrete Formulierung	41
5.2.3. Ergebnisse und Diskussion	41
5.3. Instationäre temperaturinduzierte Nischenströmung	45
5.3.1. Problembeschreibung	45
5.3.2. Validierungsgrößen	48
5.3.3. Schwache und zeitdiskrete Formulierung	50
5.3.4. Ergebnisse und Diskussion	51
5.4. Konvektionsströmungen im äußeren Erdkern	55
5.4.1. Problembeschreibung	55
5.4.2. Ergebnisse und Diskussion	58
6. Fazit und Ausblick	62
Abbildungsverzeichnis	VII
Tabellenverzeichnis	IX
Literaturverzeichnis	X
A. Quelltexte	i
A.1. Stationäre Nischenströmung mit dem Hybrid-Solver	i
A.2. Instationäre KÁRMÁnsche-Wirbelstraße mit dem SBDF-Verfahren	iv
A.3. Instationäre temperaturinduzierte Nischenströmung mit dem SBD- F-Verfahren	viii
A.4. Konvektionsströmung im äußeren Erdkern mit dem SBDF-Verfahren	xiii

1. Einleitung

Numerische Simulationen von Prozessen im Inneren von Himmelskörpern wie der Sonne oder der Erde tragen entscheidend zum Verständnis ihrer Dynamik und Geschichte bei. Noch teils unerklärte Phänomene sind Schwankungen des geomagnetischen Feldes der Erde. Die heute allgemein anerkannte Modelltheorie zur wesentlichen Beschreibung der Entstehung oder besser Verstärkung des bereits schwach vorhandenen, magnetischen Feldes der Erde ist das sog. Geodynamo-Modell, siehe [Hollerbach 1996]. Sie ist auf den im flüssigen, äußeren Erdkern stattfindenden Dynamoeffekt zurückzuführen und beschreibt die dort hervorgerufene elektromagnetische Induktion. Die gemessenen Schwankungen des magnetischen Feldes lassen sich in der Veränderung der Feldstärke und -richtung identifizieren. Dabei treten die Veränderungen auf verschiedenen Zeitskalen auf. Das geomagnetische Feld erfährt beispielsweise durch Sonnenwinde kurzfristige Veränderungen, welche einige Tage bis hin zu einigen Monaten andauern können. Langfristige Veränderungen wiederum finden im Rahmen von mehreren tausend oder Millionen Jahren statt und können mittels magnetischer Remanenzen in abgelagerten Gesteinen detektiert werden. Ein extremes Beispiel hierfür bilden Umpolungen des Erdmagnetfeldes, vgl. etwa [Cox u. a. 1964] und [Glatzmaiers u. Roberts 1995]. Des Weiteren hat man durch Auswertungen historischer Datenreihen festgestellt, dass auch mittelfristige Schwankungen mit einer dominanten Regelmäßigkeit von 60-300 Jahren vorliegen, wobei die Ursachen dafür noch unbekannt sind, siehe [Russel u. a. 2006]. Buffett vermutet, dass die Erforschung der im äußeren Erdkern vorzufindenden Konvektionsströmungen zur Aufklärung der Ursachen beisteuern könnte, siehe [Buffett 2014]. Dabei ist es wichtig anzumerken, dass die wahre Konvektionsstruktur der Erde noch nicht bekannt ist. Sie wird als turbulent angenommen, wobei direkte Messungen der Strömungen im Inneren der Erde nicht möglich sind. Allerdings geben indirekte, seismologische Untersuchungen begrenzten Aufschluss über die Zusammensetzung und das Verhalten des Erdinneren.

Die vorliegende Bachelorarbeit beschäftigt sich mit der Beschreibung von physikalischen Vorgängen im flüssigen Erdkern. Der Fokus liegt auf der Modellierung und numerischen Simulation der dort vorhandenen Konvektionsströmungen. Eine wesentliche Vereinfachung des Problems ist die Vernachlässigung des im Erdkern vorhandenen Magnetfeldes, da dies andernfalls den Umfang einer Bachelorarbeit überstiegen hätte. In der Geophysik erfolgt die Modellierung der physikalischen Prozesse des flüssigen Erdkerns als rotierende Kugelschale, die mit

Flüssigkeit gefüllt ist, siehe [Glatzmaiers u. Roberts 1995]. Die in dieser Arbeit vorgestellten Berechnungen beschränken sich jedoch aufgrund von limitierten technischen Möglichkeiten auf unbewegte, zweidimensionale Geometrien. In

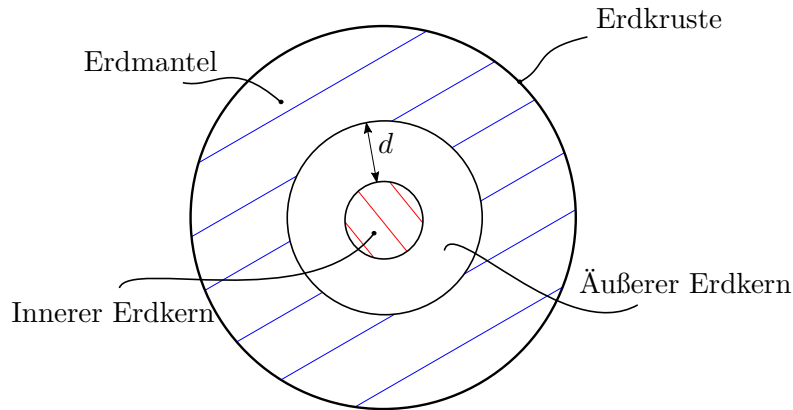


Abb. 1.1.: Skizze des inneren Aufbaus der Erde

Abbildung 1.1 ist eine schematische Skizze des inneren Aufbaus der Erde dargestellt. Das für die Simulation relevante Gebiet ist der äußere Erdkern mit einer Schichtdicke von $d = 2259$ km, vgl. etwa [Anderson 1989], S. 68. Die dort befindliche Flüssigkeit wird dabei als homogenes, inkompressibles, elektrisch und thermisch leitfähiges, reibungsbehaftetes Fluid beschrieben. Sie ist am Übergang zum festen, inneren Erdkern heißer als am äußeren Rand der Kugelschale. Dies hat zur Folge, dass sich ein temperaturinduzierter Dichteunterschied bildet, welcher wiederum Auftriebskräfte hervorruft. Somit ist zur Beschreibung der Prozesse im flüssigen Erdkern die Bestimmung des Temperatur- und Geschwindigkeitsfeldes nötig. Diese Felder werden durch die Impuls- und Energiebilanz beschrieben. Die Koppelung der Terme erfolgt über dimensionslose Kennzahlen, wie z. B. der RAYLEIGH-Zahl, PRANDTL-Zahl, PÉCLET-Zahl, REYNOLDS-Zahl oder ECKERT-Zahl, siehe [Prandtl u. a. 1990].

Zur numerischen Lösung des gekoppelten, partiellen Differentialgleichungssystems mittels der Methode der finiten Elemente werden frei zugängliche Software-Pakete, welche im Zuge des *FEniCS-Project* gestaltet wurden, verwendet, siehe [Alnæs u. a. 2015]. Dennoch stellen numerische Lösungen nur Approximationen dar und hängen stark vom gewählten mathematischen Modell und den verwendeten numerischen Methoden ab, welche in der vorliegenden Arbeit diskutiert werden.

In Kapitel 2 werden die Grundlagen der Kontinuumstheorie angeschnitten, sodass beginnend mit dem Satz von GAUSS und dem REYNOLDSSchen Transporttheorem die darauf folgenden Bilanzgleichungen formuliert werden, die die Grundlage

des zu berechnenden Problems bilden. Anschließend werden in [Kapitel 3](#) die konstitutiven Gleichungen vorgestellt und dadurch Annahmen an das dort formulierte, mathematische Modell getroffen, welche den Anwendungsbereich des gesamten Modells einschränken. Außerdem werden die Gleichungen mit den Bilanzgleichungen verbunden, woraus sich die Feldgleichungen ergeben. Diese Feldgleichungen werden abschließend entdimensioniert.

[Kapitel 4](#) beschäftigt sich mit der numerischen Behandlung des gekoppelten Differentialgleichungssystems. Dazu werden die Feldgleichungen in schwache Formulierungen überführt. Nach der räumlichen Diskretisierung wird das für die Konvektionsströmungen verwendete Verfahren der zeitlichen Diskretisierung motiviert. Zusätzlich werden die Iterationsvorschriften der verwendeten Methoden zur Lösung der nichtlinearen Differentialgleichungen am Beispiel der stationären NAVIER-STOKES-Gleichung vorgestellt. In [Kapitel 5](#) werden Benchmarktests vorgenommen, um die implementierten Verfahren und Programme zu verifizieren. Die für die Verifizierung verwendeten Benchmarktests sind die Nischenströmung, die KÁRMÁNSchen-Wirbelstraße und die temperaturinduzierte Nischenströmung. Dadurch werden die Anforderungen an die Genauigkeit der anschließenden Berechnungen des multiphysikalischen Problems der Konvektionsströmungen gedeckt und die Ergebnisse nachvollziehbar.

Das [Kapitel 6](#) fasst die Arbeit zusammen und bietet Ausblicke auf mögliche Anschlüsse an die vorgestellten Ergebnisse. Im [Anhang A](#) sind die Quelltexte zu finden, die im Zuge der Bearbeitung der einzelnen Benchmarktests und der Konvektionsströmungen verfasst wurden.

2. Grundlagen der Kontinuumstheorie

In diesem Kapitel werden die Grundlagen der Kontinuumstheorie nach der in [Müller 2011] gehaltenen Struktur vorgestellt. Das Interesse liegt in der Bestimmung der fünf gesuchten Feldgrößen: der Dichte $\rho = \hat{\rho}(\mathbf{x}, t)$, der drei Komponenten der Geschwindigkeit $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t)$ und der Temperatur $T = \hat{T}(\mathbf{x}, t)$, zu allen Zeiten t , in allen Punkten \mathbf{x} eines zeitlich konstanten, materiellen Körpers $V(t) = \hat{V}$.

2.1. Satz von Gauss

Ein Werkzeug der Kontinuumstheorie zur Analyse von Vektorfeldern ist der Satz von GAUSS. Im Folgenden wird der Satz von GAUSS motiviert und zusätzlich die Notation bezüglich des Nabla-Operators eingeführt. Der Satz von GAUSS besagt, dass der Durchfluss eines Vektorfeldes durch eine geschlossene Fläche gleich dem Integral der Divergenz des Vektorfeldes, über das von der geschlossenen Fläche eingehüllte Volumen, ist. Sei $\boldsymbol{\psi}$ das stetig differenzierbare Vektorfeld, $V(t)$ das Volumen und $\partial V(t)$ der dazugehörige glatte Rand, dann lautet der Satz, vgl. [Müller 2011], S. 55:

$$\iiint_{V(t)} \nabla \cdot \boldsymbol{\psi} \, dV = \oiint_{\partial V(t)} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\psi} \, dA, \quad (2.1)$$

wobei \mathbf{n} der Normaleneinheitsvektor des Flächenelements dA ist, siehe [Abbildung 2.1](#). Da die vorliegende Arbeit kartesische Koordinaten verwendet, gilt für die Divergenz eines stetig differenzierbaren Vektorfeldes:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\psi} = \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i}. \quad (2.2)$$

Gebundene Indizes werden entsprechend der EINSTEINSchen Summenkonvention¹ summiert. Des Weiteren wird in dieser Arbeit der Gradient eines Tensors beliebiger Stufe durch den Nabla-Operator ∇ und der Konvention des Linksgradienten definiert ist.² Soll der Satz von GAUSS auch für allgemeinere Fälle aufgestellt

¹ $a_i \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^3 a_i \mathbf{e}_i$.

² $\nabla \mathbf{a} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$

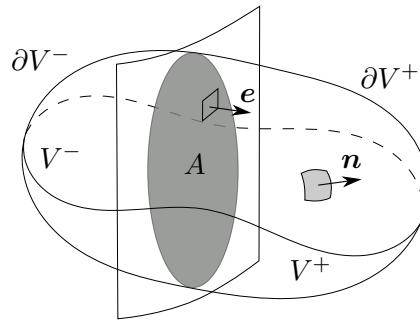


Abb. 2.1.: Skizze eines materiellen Körpers $V(t)$ und den jeweiligen Bereichen V^\pm , die durch die singuläre Fläche A geteilt sind. Die Normaleneinheitsvektoren auf den Oberflächen ∂V^\pm und der singulären Fläche A sind jeweils mit \mathbf{n} und \mathbf{e} dargestellt.

werden, wird, wie in [Abbildung 2.1](#) dargestellt, ein materieller Körper $V(t)$ durch eine singuläre Fläche A in zwei ebenfalls zeitabhängige Volumenhälften V^\pm geteilt. In diesem Fall lautet der Satz von GAUSS:

$$\iiint_{V^+ \cup V^-} \nabla \cdot \boldsymbol{\psi} \, dV = \iint_{\partial V^+ \cup \partial V^-} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\psi} \, dA - \iint_A [[\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\psi}]] \, dA, \quad (2.3)$$

wobei für die Sprungklammern Folgendes gilt:

$$[[\boldsymbol{\psi}]] = \boldsymbol{\psi}^+ - \boldsymbol{\psi}^-. \quad (2.4)$$

$\boldsymbol{\psi}^+$ und $\boldsymbol{\psi}^-$ sind die Grenzwerte die $\boldsymbol{\psi}$ annimmt, wenn man sich der singulären Fläche von der jeweiligen Hälfte nähert.

2.2. Transporttheorem für materielle Volumina

In diesem Abschnitt wird das Transporttheorem für materielle Volumina motiviert, welches unter anderem für die Herleitung der grundlegenden Erhaltungssätze benötigt wird. Für das in [Abbildung 2.1](#) dargestellte Volumen wird die zeitliche Änderung eines zeit- und ortsabhängigen, skalaren Feldes Φ betrachtet. Die Zeitableitung für einen solchen Fall lautet wie folgt, vgl. [Müller 2011], S. 55:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V^+ \cup V^-} \Phi \, dV = \iiint_{V^+ \cup V^-} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\Phi \mathbf{v}) \right) \, dV. \quad (2.5)$$

Unter Verwendung des GAUSSschen Integralsatzes in [Gleichung \(2.3\)](#) kann obige Gleichung zu folgender Formulierung geführt werden:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V^+ \cup V^-} \Phi \, dV = \iiint_{V^+ \cup V^-} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \, dV + \iint_{\partial V^+ \cup \partial V^-} \Phi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dA - \iint_A [[\Phi \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}]] \, dA, \quad (2.6)$$

wobei angenommen wird, dass V^+ und V^- materielle Gebiete sind, in denen Φ stetig verläuft. Das Transporttheorem in der Form der [Gleichung \(2.6\)](#) ist das sogenannte REYNOLDSsche Transporttheorem.³

2.3. Massenbilanz

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit der Massenbilanz, eine der allgemeingültigen Bilanzgleichungen der Kontinuumstheorie und mit der Herleitung der Kontinuitätsgleichung und der Inkompressibilitätsbedingung. Zunächst setzt sich die Gesamtmasse m eines materiellen Körpers $V(t)$ zusammen aus den Einzelmassen dm der Untervolumina dV . Da im Rahmen der Kontinuumstheorie die Massendichte ρ stetig im Ort ist, lässt sich dies auch wie folgt formulieren, siehe [Müller 2011], S. 49:

$$m = \int_m dm = \iiint_{V(t)} \rho \, dV. \quad (2.7)$$

Die Masse ist eine Erhaltungsgröße und kann demzufolge nicht produziert werden. Bezüglich der Zeit bleibt sie erhalten. Es folgt:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} \rho \, dV = 0. \quad (2.8)$$

Wie in [Abschnitt 2.2](#) motiviert, muss die globale Bilanzgleichung für die Masse aufgrund der zeitlichen Abhängigkeit der Integralgrenzen und des Integranden besonders behandelt werden. Dazu wird das Transporttheorem für Volumina in [Gleichung \(2.6\)](#) und der Satz von GAUSS in [Gleichung \(2.3\)](#) verwendet, sodass für [Gleichung \(2.8\)](#) folgende Formulierung gilt:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} \rho \, dV = \iiint_{V(t)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right) \, dV = 0. \quad (2.9)$$

³Eine allgemeinere Formulierung des Transporttheorems ist in [Müller 2011], S. 58 formuliert. Diese wird erreicht, indem die Geschwindigkeit der singulären Fläche unabhängig von der materiellen Geschwindigkeit des selben Bereichs des Körpers gewählt wird. Für die grundlegende Beschreibung des Problems ist dies aber nicht notwendig.

Beschränkungen für den von der Materie eingenommenen Körper gibt es hierbei nicht. Dieser kann jede beliebige Form annehmen. Daraus lässt sich schließen, dass der stetige Integrand zu null gefordert werden kann und somit die lokale beziehungsweise differentielle Form des Erhaltungssatzes der Masse gewonnen wird:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 . \quad (2.10)$$

Gleichung (2.10) ist die sogenannte Kontinuitätsgleichung. Drückt man diese mit der materiellen Ableitung aus, gilt folgende Beziehung:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 . \quad (2.11)$$

Die materielle Ableitung der Dichte $\frac{d\rho}{dt}$ wird definiert als:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = 0 , \quad (2.12)$$

sodass die Inkompressibilitätsbedingung

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.13)$$

gültig ist. Die Annahme der Inkompressibilität setzt voraus, dass keine oder lediglich vernachlässigbare kleine strömungsbedingte Dichteunterschiede vorliegen, siehe [Herwig 2006], S. 17.

2.4. Impulsbilanz

In diesem Abschnitt wird die Impulsbilanz hergeleitet, mit der die Beziehung für die gesuchte Feldgröße der Geschwindigkeit gewonnen wird. Summiert man die einzelnen Impulsdichten $\rho \mathbf{v}$ materieller Teilchen über den gesamten materiellen Körper, so erhält man den Gesamtimpuls \mathbf{P} des Körpers:

$$\mathbf{P} = \iiint_{V(t)} \rho \mathbf{v} \, dV . \quad (2.14)$$

Nach NEWTONS *Lex Secunda* bewirken die auf einen Körper angreifenden Kräfte zeitliche Änderungen des Impulses. Folgendes Axiom lässt sich somit aufstellen:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{K} \equiv \mathbf{T} + \mathbf{F} . \quad (2.15)$$

Üblicherweise wird dabei eine additive Zerlegung in Massenkräfte \mathbf{F} und Oberflächenkräfte \mathbf{T} vorgenommen. Weiterhin wird die Existenz zweier additiver Felder

$\mathbf{t} = \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, t; \mathbf{n})$ und $\mathbf{f} = \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t)$ angenommen, so dass für die zerlegten Kräfte folgende Beziehungen gelten:

$$\mathbf{T} = \oint_{\partial V(t)} \mathbf{t} \, dA, \quad \mathbf{F} = \iiint_{V(t)} \rho \mathbf{f} \, dV, \quad (2.16)$$

Zusammenfassend resultiert die globale Impulsbilanz wie folgt:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} \rho \mathbf{v} \, dV = \oint_{\partial V(t)} \mathbf{t} \, dA + \iiint_{V(t)} \rho \mathbf{f} \, dV. \quad (2.17)$$

Darauffolgend wird der sogenannte CAUCHYSche Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ eingeführt, der den Spannungszustand des Körpers beschreibt. Folgende Beziehung zwischen dem Spannungsvektor \mathbf{t} und dem Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ wird auch CAUCHYSche Formel genannt und lautet:

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t; \mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}. \quad (2.18)$$

Mit dieser Beziehung lässt sich die globale Impulsbilanz auf folgende Gleichung umschreiben:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} \rho \mathbf{v} \, dV = \oint_{\partial V(t)} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \, dA + \iiint_{V(t)} \rho \mathbf{f} \, dV. \quad (2.19)$$

Wieder sind sowohl der Integrand als auch die Integralgrenzen der linken Seite von der Zeit abhängig. Mit dem Satz von GAUSS in [Gleichung \(2.3\)](#) und dem REYNOLDSsche Transporttheorem in [Gleichung \(2.6\)](#) erhalten wir folgende Gleichung:

$$\iiint_{V(t)} \left(\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} - \boldsymbol{\sigma}) - \rho \mathbf{f} \right) dV = \mathbf{0}. \quad (2.20)$$

Analog zur [Gleichung \(2.10\)](#) müssen hier die einzelnen Komponenten des stetigen Integranden gleich null sein. Dieser Schritt führt zur folgenden lokalen Impulsbilanz in regulären Punkten:

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} - \boldsymbol{\sigma}) - \rho \mathbf{f} = \mathbf{0}. \quad (2.21)$$

Unter Verwendung der materiellen Zeitableitung, der Beachtung der Produktregel der Differentiation und der Massenbilanz lässt sich obige Gleichung auch wie folgt formulieren:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \rho \mathbf{f} = \mathbf{0}. \quad (2.22)$$

Die Terme können auf getrennte Seiten der Gleichung gebracht werden, sodass NEWTONS *Lex Secunda* wieder ersichtlich wird:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f} . \quad (2.23)$$

2.5. Bilanz der Energie

Dieser Abschnitt behandelt die Bilanz der Energie und liefert eine Koppelung zwischen mechanischer und thermischer Energie, wobei mögliche chemische Reaktionen ausgeschlossen werden. Anschließend wird daraus die Bilanz der inneren Energie gewonnen.

Sei e die spezifische innere Energie pro Masseneinheit, dann erhalten wir die innere Energie eines materiellen Teilchens über $e dm$ und die eines materiellen Körpers durch:

$$E_{\text{in.}} = \iiint_{V(t)} \rho e dV . \quad (2.24)$$

Zugleich ist die kinetische Energie des Körpers gegeben durch, vgl. [Spurk u. Aksel 2006], S. 70:

$$K = \iiint_{V(t)} \rho \frac{\mathbf{v}^2}{2} dV . \quad (2.25)$$

Die Bilanz der Energie setzt die zeitliche Änderung der gesamten Energie eines Körpers in Beziehung mit den Größen, die diese Änderung hervorrufen. Diese Änderung kann durch die Leistung der von außen angreifenden Kräfte, also den Oberflächen- und Volumenkräften und durch die von außen zugeführte Energie pro Zeiteinheit hervorgerufen werden. Die Zufuhr von Energie umfasst den Wärmeaustausch mit der Umgebung und die Strahlung, wobei Letztere vernachlässigt wird. Die äußeren Kräfte wurden bereits für die Impulsbilanz in den Gleichungen (2.16)₁ und (2.16)₂ eingeführt. Die gesamte Leistung L der äußeren Kräfte am Körper berechnet sich aus:

$$L = \iiint_{V(t)} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} dV + \iint_{\partial V(t)} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} dA . \quad (2.26)$$

Den Wärmestrom Q über die Grenzen des Gebiets definieren wir über den stetig differenzierbaren Wärmestromvektor \mathbf{q} und den Normaleneinheitsvektor \mathbf{n} des Flächenelements dA . Einfließende Ströme sollen als positive Ströme gezählt werden. Es gilt:

$$Q = - \oiint_{\partial V(t)} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dA . \quad (2.27)$$

Die Bilanz der Energie unter Vernachlässigung der Strahlung lautet dann, vgl. etwa [Anderson 1989], S. 79:

$$\frac{d}{dt}(E_{\text{in.}} + K) = L + Q, \quad (2.28)$$

und ausformuliert:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} \rho \left(e + \frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) dV = \iiint_{V(t)} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} dV + \oint_{\partial V(t)} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t} - \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) dA. \quad (2.29)$$

Weiterhin ist die Bilanz der inneren Energie von Interesse. Um eine Formulierung für diese zu finden, wird jedoch zunächst die Impulsbilanz in [Gleichung \(2.21\)](#) mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} skalar multipliziert, sodass

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} \rho \frac{\mathbf{v}^2}{2} dV = \oint_{\partial V(t)} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} dA - \iiint_{V(t)} \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot (\nabla \mathbf{v}) dV + \iiint_{V(t)} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} dV \quad (2.30)$$

resultiert, vgl. [Müller 2011], S. 72. [Gleichung \(2.30\)](#) ist die Bilanz der kinetischen Energie. Nun wird die CAUCHYSche Formel in [Gleichung \(2.18\)](#) genutzt, um folgende Gleichung zu erhalten:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} \rho \frac{\mathbf{v}^2}{2} dV = \oint_{\partial V(t)} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} dA - \iiint_{V(t)} \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot (\nabla \mathbf{v}) dV + \iiint_{V(t)} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} dV. \quad (2.31)$$

Die Formulierung der Bilanz der inneren Energie wird anschließend durch Subtraktion der Bilanz der kinetischen Energie von der Bilanz der gesamten Energie in [Gleichung \(2.29\)](#) gewonnen. In globaler Form lautet das Resultat wie folgt:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} \rho e dV = - \oint_{\partial V} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dA + \iiint_{V(t)} \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot (\nabla \mathbf{v}) dV. \quad (2.32)$$

Auch hier wird das REYNOLDSSche Transporttheorem in [Gleichung \(2.6\)](#) und der Satz von GAUSS in [Gleichung \(2.3\)](#) auf der linken Seite der Gleichung angewandt, sodass:

$$\iiint_{V(t)} \left(\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e \mathbf{v}) + \nabla \cdot \mathbf{q} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot (\nabla \mathbf{v}) \right) dV = 0. \quad (2.33)$$

Analog zum vorherigen Schema liefert die gesonderte Betrachtung des Integranden die Bilanz der inneren Energie in lokaler Form:

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e \mathbf{v}) + \nabla \cdot \mathbf{q} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot (\nabla \mathbf{v}) = 0. \quad (2.34)$$

In [Abschnitt 2.3](#) und [Abschnitt 2.4](#) wurde bereits gezeigt, dass die materielle Zeitableitung und die Produktregel der Differentiation genutzt werden kann, um die lokale Form dieser Bilanz, unter Beachtung der Massenbilanz in [Gleichung \(2.13\)](#), auch wie folgt zu formulieren, siehe [Müller 2011], S. 118:

$$\rho \frac{de}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{q} - \boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla \mathbf{v}) = 0 . \quad (2.35)$$

Die benötigten lokalen Bilanzen [\(2.23\)](#) und [\(2.35\)](#) sind schließlich hergeleitet.

3. Physikalische Modellierung

Dieses Kapitel befasst sich mit der physikalischen Modellierung des zu lösenden Problems der Konvektionsströmungen. Angesichts der getroffenen Idealisierungen ist das aufgestellte Modell mit Ungenauigkeiten behaftet und entspricht nicht der exakten Realität.

Zwei der hier getroffenen, essentiellen Idealisierungen des Fluids sind die der Isotropie und Homogenität. Weiterhin werden die konstitutiven Gleichungen, auch Materialgleichungen genannt, vorgestellt, welche in Verbindung mit den Bilanzgleichungen schließlich die gesuchten Feldgleichungen liefern. Wichtig anzumerken ist, dass auf eine vollständige Analyse des Verhaltens physikalischer Eigenschaften bezüglich der Temperatur verzichtet wird, da diese zu umfangreich wäre. Allerdings basiert dies im Wesentlichen auf der in [Unterabschnitt 3.1.4](#) vorgestellten BOUSSINESQ-Approximation, siehe [Boussinesq 1897]. Abschließend werden die dimensionslosen Formulierungen der Feldgleichungen hergeleitet.

3.1. Materialgleichungen

In diesem Abschnitt werden Materialgleichungen formuliert, die den CAUCHYSchen Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$, den Wärmestromvektor \mathbf{q} , die spezifische innere Energie e und die Volumenkraftdichte $\rho\mathbf{f}$ in Abhängigkeit der fünf gesuchten Feldgrößen und ihren Ableitungen ausdrücken, sodass ein geschlossenes System von Gleichungen für die Berechnung der oben genannten Feldgrößen vorhanden ist.

3.1.1. Navier-Stokes-Materialgleichung

Die für diese Arbeit verwendete Materialgleichung zur Beschreibung von reibungsbehafteten Fluiden ist die sogenannte NAVIER-STOKES-Materialgleichung. Sie stellt einen linearen Zusammenhang zwischen dem Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ und dem des symmetrischen Anteils des Geschwindigkeitsgradienten \mathbf{d} her und lautet, vgl. etwa [Müller 2011], S. 112:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{d}, \quad (3.1)$$

wobei der Einheitstensor und das KRONECKER-Delta wie folgt definiert sind:

$$\mathbf{I} = \delta_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad \text{mit} \quad (3.2)$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{für } i = j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} . \quad (3.3)$$

Der symmetrische Anteil des Geschwindigkeitsgradienten bezüglich einer kartesischen Basis nimmt folgende Form an:

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2} (\nabla \otimes \mathbf{v} + \mathbf{v} \otimes \nabla) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j . \quad (3.4)$$

Modelle von Fluiden, bei denen der Spannungstensor lediglich in linearem Zusammenhang mit dem Geschwindigkeitsgradienten steht, werden auch NEWTONsche Fluide genannt. Mit den skalaren Größen λ , μ ist jeweils die Volumen- und Scherviskosität gemeint und für den Druck wird die skalare Größe p verwendet. Die Volumenviskosität ist jedoch nicht von großem Interesse für inkompressible Fluide, da die Divergenz der Geschwindigkeit gleich null ist. Dadurch vereinfacht sich die Materialgleichung wie folgt:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{d} . \quad (3.5)$$

Der Druck p ist unbekannt und muss demzufolge berechnet werden. Die Berechnung kann bei inkompressiblen Fluiden über eine weitere konstitutive Gleichung oder über die Massenbilanz mit der Inkompressibilitätsbedingung in [Gleichung \(2.13\)](#) erfolgen. Letztere wird für die spätere Berechnung des Drucks genutzt.

3.1.2. Fouriersches Wärmeleitungsgesetz

Eine Konkretisierung des Wärmestromvektors \mathbf{q} für die Bilanzierung der inneren Energie erfolgt unter der Annahme des von FOURIER aufgestellten Wärmeleitungsgesetzes. Allgemein lautet das Gesetz:

$$\mathbf{q} = -\mathbf{K} \cdot \nabla T . \quad (3.6)$$

Es besagt in Worten, dass der Wärmestrom proportional zum Temperaturgradienten ist und in die entgegengesetzte Richtung des Gradienten fließt. In den Komponenten K_{ij} befinden sich die Informationen der Wärmeleitfähigkeiten der jeweiligen Richtungen. Da Isotropie des Materials angenommen wird, reduzieren sich die Komponenten auf eine einzige Komponente, welche κ genannt wird. Folglich kann das Wärmeleitungsgesetz für homogene, isotrope Materialien

formuliert werden:

$$\mathbf{q} = -\kappa \nabla T \quad \text{mit} \quad \kappa > 0 . \quad (3.7)$$

Die Modellierung des Wärmestroms ist ein wesentlicher Bestandteil der späteren Berechnung von Konvektionsströmungen. Dabei kann die Größenordnung der Wärmeleitfähigkeit κ stark variieren, je nachdem um welches Material es sich handelt oder in welchem Zustand sich das Material befindet.

3.1.3. Thermische Ausdehnung

Außerdem soll das modellierte Material temperaturinduzierte Dichteunterschiede erfahren können. Allerdings werden im Zuge der Modellierung in [Unterabschnitt 3.1.4](#) Bedingungen vorgestellt, die an diese Annahme gekoppelt sind. Die Änderung der Dichte lässt sich allgemein wie folgt darstellen:

$$\rho(T) = \rho_0 + \Delta\rho \quad \text{mit} \quad \rho_0 = \rho(T_0) . \quad (3.8)$$

Die Referenzzustände sind mit ρ_0 und T_0 gekennzeichnet und die Änderung der Dichte mit $\Delta\rho$. Sei m weiterhin die konstante Masse und $V(T)$ das von der Temperatur abhängige Volumen, dann lässt sich die Dichte auch durch folgende Beziehung bestimmen:

$$\rho(T) = \frac{m}{V(T)} . \quad (3.9)$$

Mit dieser Beziehung lässt sich feststellen, dass sich die Dichte bezüglich der Änderung des Volumens wie folgt verhält:

$$\frac{\partial\rho}{\partial V} = -\frac{m}{V^2(T)} . \quad (3.10)$$

Wenn sich das Volumen vergrößert, verringert sich die Dichte proportional zum Quadrat des Volumens. Eine Linearisierung des Volumens in Abhängigkeit von der Temperatur erfolgt durch die TAYLOR-Entwicklung um die Entwicklungsstelle $T = T_0$, wobei Terme höherer Ordnung vernachlässigt werden. Es gilt:

$$V(T) = V_0 + \left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_{T_0} \Delta T \quad \text{mit} \quad \Delta T = (T - T_0) . \quad (3.11)$$

Mit der Definition

$$\beta := \frac{\partial V}{\partial T} \quad (3.12)$$

und der Beziehung $\Delta V = \beta(T - T_0) = \beta\Delta T$ erhalten wir für [Gleichung \(3.11\)](#) folgende Formulierung:

$$V(T) = V_0 + \beta(T - T_0) = V_0 + \beta\Delta T . \quad (3.13)$$

Anschließend wird die Dichte mit Hilfe der TAYLOR-Entwicklung wie folgt linearisiert:

$$\rho(T) = \rho(T_0) + \left. \frac{\partial \rho}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial T} \right|_{T_0} (T - T_0) . \quad (3.14)$$

Die Beziehungen in den Gleichungen (3.10) - (3.12) können genutzt werden, um die Dichte wie folgt zu berechnen:

$$\begin{aligned} \rho(T) &= \rho_0 - \left(\frac{m}{V(T)^2} \frac{\partial V}{\partial T} \right) \Big|_{T_0} (T - T_0) = \rho_0 - \frac{m}{V_0^2} \beta (T - T_0) \\ &= \rho_0 \left(1 - \frac{\beta}{V_0} (T - T_0) \right) = \rho_0 (1 - \alpha (T - T_0)) \quad \text{mit} \quad \alpha := \frac{\beta}{V_0} , \end{aligned} \quad (3.15)$$

wobei α der sogenannte lineare Wärmeausdehnungskoeffizient ist. Daraus ergibt sich für die Änderung der Dichte folgender Zusammenhang, vgl. Tritton [1988], S. 164:

$$\Delta \rho = -\alpha \rho_0 \Delta T \quad \text{mit} \quad \alpha > 0 . \quad (3.16)$$

Zu erkennen ist, dass eine Temperaturerhöhung zu einer Verringerung der Dichte führt. Die obige Gleichung (3.16) ist widersprüchlich zu der in Gleichung (2.13) genannten Inkompressibilitätsbedingung, welche voraussetzt, dass die Änderung der Dichte vernachlässigbar klein ist. In Konvektionsströmungen erfahren jedoch materielle Teilchen temperaturinduzierte Dichteunterschiede, die wiederum maßgebliche Auftriebskräfte hervorrufen und nicht zu vernachlässigen sind.

3.1.4. Boussinesq-Approximation

Um einen Kompromiss für die beiden in Widerspruch stehenden Gleichungen zu finden, wird in diesem Abschnitt die BOUSSINESQ-Approximation vorgestellt, welche häufig in der Strömungsmechanik für die Modellierung von Konvektionsproblemen verwendet wird.

In der BOUSSINESQ-Approximation werden die Eigenschaften physikalischer Materialparameter bezüglich der Temperatur als konstant angenommen. Eine Ausnahme bildet hierbei die Dichte. Ihre Abhängigkeit von der Temperatur wird allein in der Impulsbilanz, oder, genauer gesagt, bezüglich der thermischen Ausdehnung und der dadurch hervorgerufenen archimedischen Auftriebskraft berücksichtigt. Das Fluid wird demzufolge bei einem nicht vorhandenen Gleichgewicht zwischen der Gewichtskraft und der archimedischen Auftriebskraft in Bewegung versetzt. Eine ausführliche Beschreibung der BOUSSINESQ-Approximation ist in [Chandrasekhar 1981], S. 16 ff., zu finden.

Mit dieser Approximation behält die Massenbilanz in Gleichung (2.13) ihre genannte Form, vgl. [Prandtl u. a. 1990], S. 293 und [Tritton 1988], S. 163. Die

Volumenkraftdichte in der Impulsbilanz muss jedoch entsprechend der BOUSSINESQ-Approximation angepasst werden. Im Falle eines vorhandenen Gravitationsfeldes mit der Gravitationsbeschleunigung \mathbf{g} gilt für die Volumenkraftdichte:

$$\rho \mathbf{f} = \rho \mathbf{g} \quad \text{mit} \quad \mathbf{g} = -\nabla \Phi . \quad (3.17)$$

Das Potential Φ muss für das jeweilige Problem definiert werden und wird deswegen nicht weiter konkretisiert. Für die Volumenkraftdichte kann mit obiger Gleichung zunächst folgende Formulierung geschrieben werden:

$$\rho \mathbf{f} = -(\rho_0 + \Delta \rho) \nabla \Phi = -\nabla(\rho_0 \Phi) + \Delta \rho \mathbf{g} . \quad (3.18)$$

An dieser Stelle ist zu erkennen, dass die Volumenkraftdichte der Impulsbilanz von der Änderung der Dichte abhängig ist, während die Änderung der Dichte selbst von der Temperatur abhängt.

3.1.5. Kalorische Zustandsgleichung

Die letzte hier vorgenommene Konkretisierung, die in den Bereich der Materialmodellierung fällt, soll die spezifische innere Energie e in Beziehung mit den gesuchten Feldgrößen und ihren Ableitungen stellen. Dazu kann folgende kalorische Zustandsgleichung genutzt werden:

$$\frac{de}{dt} = c_p \frac{dT}{dt} = c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T \right) , \quad (3.19)$$

wobei c_p die sogenannte isobare spezifische Wärmekapazität, ein materialspezifischer Wert, ist.

3.2. Feldgleichungen

Nachdem in [Kapitel 2](#) die allgemeingültigen Bilanzgleichungen und in [Abschnitt 3.1](#) die benötigten konstitutiven Gleichungen formuliert wurden, werden diese in Verbindung gesetzt. Darauf basierend werden die Feldgleichungen für die Geschwindigkeit und für die Temperatur aufgestellt.

3.2.1. Navier-Stokes-Gleichung

Die NAVIER-STOKES-Gleichung¹ ist die grundlegende Gleichung zur Beschreibung von Strömungen reibungsbehafteter Fluide. Sie leitet sich aus der zuvor aufgestellten Impulsbilanz in [Gleichung \(2.23\)](#), der Massenbilanz in [Gleichung \(2.13\)](#),

¹Die Inkompressibilitätsbedingung in [Gleichung \(3.20\)](#) wird konventionell mit aufgeführt, da verdeutlicht werden soll, dass es sich weiterhin um eine inkompressible Strömung handelt.

der NAVIER-STOKES-Materialgleichung in [Gleichung \(3.5\)](#) und der Verknüpfung dieser her und lautet für inkompressible Strömungen, vgl. etwa [Müller 2011], S. 139²:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 , \quad (3.20)$$

$$\rho_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{f} . \quad (3.21)$$

Unter Verwendung der Beziehung in [Gleichung \(3.18\)](#), welche auf die BOUSSINESQ-Approximation zurückzuführen ist, lässt sich die NAVIER-STOKES-Gleichung wie folgt konkretisieren:

$$\rho_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} - \nabla(\rho_0 \Phi) + \Delta \rho \mathbf{g} . \quad (3.22)$$

Mit Hilfe dieser Approximation kann festgestellt werden, dass die Strömung abhängig von der variierenden Dichte ist und somit die Geschwindigkeit proportional zur Änderung der Dichte ist, die wiederum proportional zur Temperatur ist. Der Gradient des Drucks wird um den hydrostatischen Anteil verschoben, sodass mit der Substitution

$$P = p + \rho_0 \Phi \quad (3.23)$$

die übliche Form der NAVIER-STOKES-Gleichung erhalten wird:

$$\rho_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla P + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \Delta \rho \mathbf{g} . \quad (3.24)$$

Anschließend wird [Gleichung \(3.16\)](#) in obige Gleichung eingesetzt und danach durch ρ_0 geteilt, wodurch die Feldgleichungen in ihrer vorerst endgültigen Form ausgedrückt werden:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 , \quad (3.25)$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{v} - \alpha \Delta T \mathbf{g} , \quad (3.26)$$

mit der kinematischen Viskosität $\nu = \mu/\rho_0$.

3.2.2. Feldgleichung für die Temperatur

Die obigen Feldgleichungen [\(3.25\)](#) und [\(3.26\)](#) enthalten fünf unbekannte Feldgrößen, nämlich die drei Komponenten v_i der Geschwindigkeit, den Druck P und

²Für den LAPLACE-Operator (in kartesischen Koordinaten) gilt:

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} .$$

die Temperatur T (die Feldgröße der Dichte ρ wurde bereits in Beziehung mit der Temperatur gebracht, siehe [Unterabschnitt 3.1.3](#)). Aus der [Gleichung \(3.26\)](#) werden insgesamt drei Gleichungen zur Bestimmung von drei Unbekannten gewonnen, da sie eine vektorwertige Gleichung ist. Das heißt für die fünf unbekanntenen Größen stehen bisher vier Gleichungen zur Verfügung.

Diese Gleichungen sind weiterhin an die Temperatur gekoppelt. Daraus lässt sich schlussfolgern, dass eine weitere Feldgleichung zur Berechnung der Temperatur benötigt wird. Um das System von Gleichungen zu schließen, wird nochmal die lokale Bilanz der inneren Energie in [Gleichung \(2.35\)](#) betrachtet:

$$\rho \frac{de}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{q} - \boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla \mathbf{v}) = 0 . \quad (3.27)$$

Anhand der kalorischen Zustandsgleichung in [Gleichung \(3.19\)](#) lässt sich die materielle Ableitung der spezifische Energie ersetzen. Es folgt:

$$\rho_0 c_p \frac{dT}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{q} - \boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla \mathbf{v}) = 0 , \quad (3.28)$$

wobei gleichzeitig die Annahme der konstanten Dichte und die Beziehung für die Volumenkraftdichte in [Gleichung \(3.17\)](#) beachtet wurden, siehe [Unterabschnitt 3.1.4](#). Anschließend wird das FOURIERSche Wärmeleitungsgesetz in [Gleichung \(3.7\)](#) und die Definition des symmetrischen Anteils des Geschwindigkeitsgradienten in [Gleichung \(3.4\)](#) verwendet, sodass folgende Formulierung gilt:

$$\rho_0 c_p \frac{dT}{dt} - \kappa \nabla^2 T - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{d} = 0 . \quad (3.29)$$

Zuletzt wird auf die NAVIER-STOKES-Materialgleichung in [Gleichung \(3.5\)](#) zurückgegriffen und die materielle Ableitung ausgeführt. Umgestellt erhält die Feldgleichung die Form der Wärmeleitungsgleichung, wobei die innere Reibung im letzten Term der rechten Seite berücksichtigt ist:

$$\rho_0 c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T \right) = \kappa \nabla^2 T + 2\mu (\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}) . \quad (3.30)$$

Nachdem das Differentialgleichungssystem aufgestellt wurde, sind weiterhin die Anfangs- bzw. Randbedingungen zur Lösung des dazugehörigen Anfangs- bzw. Randwertproblems erforderlich. Andernfalls ist das Problem nicht vollständig beschrieben. Diese werden jedoch erst nachfolgend in den jeweiligen Problembeschreibungen vorgestellt.

3.3. Entdimensionalisierung

In diesem Abschnitt werden die NAVIER-STOKES-Gleichung und die Feldgleichung für die Temperatur mithilfe von geeigneten Substitutionen dimensionslos ausgedrückt, vgl. etwa [Herwig 2006], S. 69 ff. Entdimensionalisierungen werden genutzt, um Charakteristika von Strömungen auf einige wenige dimensionslose Kennzahlen zu reduzieren und infolgedessen die Übertragbarkeit von Ergebnissen zu ermöglichen.

Die in [Unterabschnitt 3.3.1](#) und [3.3.2](#) verwendeten Substitutionen sind für die Testprobleme der Nischenströmung in [Abschnitt 5.1](#) und der KÁRMÁNSchen-Wirbelstraße in [Abschnitt 5.2](#) praktikabel. Jedoch stellen sie unübliche Entdimensionalisierungen für die Berechnungen von Konvektionsströmungen dar. Daher sei angemerkt, dass in [Abschnitt 5.3](#) eine alternative dimensionslose Formulierung für die Verifizierung der temperaturinduzierten Nischenströmung und die Berechnung der Konvektionsströmung genutzt wird.

3.3.1. Dimensionslose Navier-Stokes-Gleichung

Für die oben genannte NAVIER-STOKES-Gleichung in [Gleichung \(3.26\)](#), die bereits in Verbindung mit der BOUSSINESQ-Approximation gebracht wurde, werden die Substitutionen wie folgt eingeführt:

$$\mathbf{v} = v_{\text{ref.}} \hat{\mathbf{v}}, \quad t = t_{\text{ref.}} \hat{t}, \quad \nabla = \frac{1}{l_{\text{ref.}}} \hat{\nabla}, \quad P = p_{\text{ref.}} \hat{p}, \quad \mathbf{g} = g_{\text{ref.}} \hat{\mathbf{g}}, \quad T = T_{\text{ref.}} \hat{T}, \quad (3.31)$$

wobei die Größen, die mit dem Subskript „ref.“ gekennzeichnet sind, die Information des charakteristischen, dimensionsbehafteten Zahlenwerts der betreffenden Strömung tragen. Die mit einem Zirkumflex akzentuierten Größen, bilden die dazugehörigen dimensionslosen Größen. Konstante Größen wie die kinematische Viskosität ν oder die Referenzdichte ρ_0 behalten ihre bisherige Bezeichnung. Mit obigen Substitutionen ergibt sich für [Gleichung \(3.26\)](#) Folgendes:

$$\rho_0 \left(\frac{v_{\text{ref.}}}{t_{\text{ref.}}} \frac{\partial \hat{\mathbf{v}}}{\partial \hat{t}} + \frac{v_{\text{ref.}}^2}{l_{\text{ref.}}} \hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\nabla} \hat{\mathbf{v}} \right) = - \frac{p_{\text{ref.}}}{l_{\text{ref.}}} \hat{\nabla} \hat{p} + \frac{\mu v_{\text{ref.}}}{l_{\text{ref.}}^2} \hat{\nabla}^2 \hat{\mathbf{v}} - \rho_0 g_{\text{ref.}} \alpha T_{\text{ref.}} \Delta \hat{T} \hat{\mathbf{g}}. \quad (3.32)$$

Nach einigen Erweiterungen und Umstellungen und der Skalierung der Zeit mit $t_{\text{ref.}} = l_{\text{ref.}}/v_{\text{ref.}}$ erhalten wir die dimensionslose Form der Impulsbilanz mit der sogenannten REYNOLDS-Zahl, Re , der PÉCLET-Zahl, Pe , und der RAYLEIGH-Zahl, Ra , siehe [Herwig 2006], S. 69:

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{v}}}{\partial \hat{t}} + \hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\nabla} \hat{\mathbf{v}} = - \hat{\nabla} \hat{p} + \frac{1}{Re} \hat{\nabla}^2 \hat{\mathbf{v}} - \frac{Ra}{Pe Re} \Delta \hat{T} \hat{\mathbf{g}}, \quad (3.33)$$

wobei für die dimensionslosen Kennzahlen die Definitionen

$$Re := \frac{v_{\text{ref.}} l_{\text{ref.}}}{\nu}, \quad Pe := \frac{l_{\text{ref.}} v_{\text{ref.}} \rho_0 c_p}{\kappa}, \quad Ra := \frac{\alpha g_{\text{ref.}} c_p \rho_0}{\nu \kappa} T_{\text{ref.}} l_{\text{ref.}}^3. \quad (3.34)$$

gelten, vgl. etwa [Prandtl u. a. 1990], S. 297. Der Druck wird mit

$$p_{\text{ref.}} := \rho_0 v_{\text{ref.}}^2. \quad (3.35)$$

entdimensioniert. Die REYNOLDS-Zahl beschreibt als dimensionslose Kennzahl das Verhältnis von Trägheits- zu Reibungskräften. Wie in [Gleichung \(3.33\)](#) zu erkennen ist, befindet sich die dimensionslose Kennzahl im Nenner des diffusiven Terms. Daraus lässt sich schließen, dass bei hohen REYNOLDS-Zahlen der Konvektionsterm einen größeren Beitrag zur Strömung beisteuert als der diffusive Term. Bei kleinen REYNOLDS-Zahlen hingegen wird der diffusive Term größer und dementsprechend die Strömung stark von der Diffusion beeinflusst. Dies spielt eine wichtige Rolle für die Stabilität von Zeitintegrationsverfahren. Ebenso wie die REYNOLDS-Zahl stellen die PÉCLET-Zahl und die RAYLEIGH-Zahl Verhältnisse dar. Die PÉCLET-Zahl gibt das Verhältnis zwischen Advektion und Diffusion bezüglich der charakteristischen Länge wieder. Die RAYLEIGH-Zahl hingegen stellt das Verhältnis aus Auftriebs- und Reibungskräften dar. Überschreitet die RAYLEIGH-Zahl einen kritischen Wert für eine bestimmte Strömungssituation, so ist die Konvektion für den wesentlichen Anteil der Wärmeübertragung verantwortlich. Liegt der Wert unterhalb des kritischen Bereichs, wird die Wärmeübertragung primär durch die Diffusion beeinflusst.

3.3.2. Dimensionslose Feldgleichung für die Temperatur

Um eine dimensionslose Formulierung der Feldgleichung [\(3.30\)](#) zu erhalten, wird diese nochmal betrachtet:

$$c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T \right) - \frac{\kappa}{\rho_0} \nabla^2 T - 2\nu (\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}) = 0. \quad (3.36)$$

Analog zur Entdimensionalisierung der NAVIER-STOKES-Gleichung werden hier Substitutionen gewählt, sodass sich zunächst Folgendes ergibt:

$$c_p \left(\frac{T_{\text{ref.}}}{t_{\text{ref.}}} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{t}} + \frac{v_{\text{ref.}} T_{\text{ref.}}}{l_{\text{ref.}}} \hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\nabla} \hat{T} \right) - \frac{\kappa T_{\text{ref.}}}{\rho_0 l_{\text{ref.}}^2} \hat{\nabla}^2 \hat{T} - 2\nu \frac{v_{\text{ref.}}^2}{l_{\text{ref.}}^2} (\hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{d}}) = 0. \quad (3.37)$$

Wie oben bereits erwähnt wurde, wird darauf verzichtet, die physikalischen Konstanten α , ν , c_p und ρ_0 mit einem zusätzlichen Subskript zu versehen. Wir stellen um und lassen die beiden ersten Terme der linken Seite ohne Vorfaktoren stehen, indem wieder die Skalierung der Zeit mit $t_{\text{ref.}} = l_{\text{ref.}}/v_{\text{ref.}}$ genutzt wird.

Somit gilt zunächst:

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{t}} + \hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\nabla} \hat{T} - \frac{\kappa}{c_p \rho_0 l_{\text{ref}} v_{\text{ref}}} \hat{\nabla}^2 \hat{T} - 2 \frac{\nu v_{\text{ref}}}{c_p T_{\text{ref}} l_{\text{ref}}} (\hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{d}}) = 0 . \quad (3.38)$$

Anschließend werden dimensionslose Kennzahlen eingeführt, sodass die Feldgleichung folgende Form erhält, vgl. etwa [Herwig 2006] S. 71. f.:

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{t}} + \hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\nabla} \hat{T} - \frac{1}{Pe} \hat{\nabla}^2 \hat{T} - 2 \frac{Ec}{Re} (\hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{d}}) = 0 . \quad (3.39)$$

Die dimensionslosen Kennzahlen in der obigen Gleichung sind die REYNOLDS-Zahl, Re , die PÉCLET-Zahl, Pe , die bereits in den [Gleichungen \(3.34\)₁](#) und [\(3.34\)₂](#) definiert wurden und die ECKERT-Zahl, Ec , mit folgender Beziehung:

$$Ec := \frac{v_{\text{ref}}^2}{c_p T_{\text{ref}}} . \quad (3.40)$$

Die ECKERT-Zahl wird genutzt, um das Verhältnis aus kinetischer Energie und der Differenz zwischen der Enthalpie eines umströmten Körpers und der Enthalpie des Fluids aufzustellen. Dabei ist die Enthalpie H über die Beziehung $H = E_{\text{in}} + pV$ definiert, wobei weiterhin E_{in} die innere Energie eines Systems, p der Druck und V das Volumen ist, siehe [Müller 2011], S. 120.

4. Numerische Behandlung

Dieses Kapitel umfasst die numerische Behandlung des oben aufgeführten gekoppelten Differentialgleichungssystems mit der Methode der finiten Elemente unter Verwendung des frei zugänglichen Software-Pakets *FEniCS*¹, siehe [Alnæs u. a. 2015]. Beginnend mit der Entwicklung der schwachen Formulierungen werden darauffolgend die Verfahren, die zur Zeitdiskretisierung und Lösung der nichtlinearen Differentialgleichungen genutzt werden, vorgestellt.

4.1. Schwache Formulierung

Für die Lösungen der Feldgleichungen (3.33) und (3.39) und der Massenbilanz werden sogenannte schwache Formulierungen benötigt. Die Lösungen von schwachen Formulierungen stimmen nicht exakt mit den sogenannten klassischen Lösungen überein. Es existieren jedoch oftmals keine klassischen Lösungen für komplexe Probleme dieser Art, sodass die modellierten Probleme in schwache Formulierungen überführt werden müssen.

Von nun an werden dimensionslose Größen ohne Zirkumflexe dargestellt!

4.1.1. Schwache Formulierung der Impulsbilanz

Seien \mathbf{v} und p die Ansatzfunktionen und seien \mathbf{w} und q die geeigneten Testfunktionen für die jeweilige Differentialgleichung, dann gilt zunächst:

$$(\nabla \cdot \mathbf{v})q = 0, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot \mathbf{w} + (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = -\nabla p \cdot \mathbf{w} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} - \frac{Ra}{PeRe} \Delta T \mathbf{g} \cdot \mathbf{w}. \quad (4.2)$$

Nachdem alle Terme auf eine Seite gebracht wurden, wird über das Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ integriert, wobei $d \in \{2, 3\}$ der Dimension des Gebietes entspricht, auf

¹*FEniCS* wurde im Rahmen des *FEniCS Project* erhoben und stellt eine Plattform zur Verfügung, auf der sich partielle Differentialgleichungssysteme mit der Methode der finiten Elemente effizient lösen lassen. Aufgrund der Schnittstelle zwischen den höheren Programmiersprachen *Python* und *C++* leistet *FEniCS* einen besonders hilfreichen Beitrag zur Lösung kontinuumstheoretischer Probleme.

dem die Berechnung stattfinden soll, sodass sich Folgendes ergibt²:

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{v}) q \, dV = 0, \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot \mathbf{w} \, dV + \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} \, dV + \frac{Ra}{PeRe} \int_{\Omega} \Delta T \mathbf{g} \cdot \mathbf{w} \, dV + \\ + \int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{w} \, dV - \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \nabla^2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \, dV = 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Zunächst betrachtet man folgende Terme in Gleichung (4.4):

$$\Upsilon_1 = \int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{w} \, dV, \quad \Upsilon_2 = - \int_{\Omega} \nabla^2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \, dV.$$

Durch Anwendung der Produktregel lassen sich diese umschreiben zu, vgl. etwa [Elman u. a. 2014], S. 127:

$$\Upsilon_1 = - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{w} \, dV + \int_{\Omega} \nabla \cdot (p \mathbf{w}) \, dV, \quad (4.5)$$

$$\Upsilon_2 = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{w} \, dV - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) \, dV. \quad (4.6)$$

An dieser Stelle kann nun der in Gleichung (2.3) eingeführte GAUSSsche Satz angewendet werden, um folgende Formulierungen für die beiden Divergenzausdrücke zu finden:

$$\begin{aligned} \Upsilon_1 &= - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{w} \, dV + \int_{\Omega} \nabla \cdot (p \mathbf{w}) \, dV \\ &= - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{w} \, dV + \oint_{\partial \Omega} p \mathbf{n} \cdot \mathbf{w} \, dA, \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \Upsilon_2 &= \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{w} \, dV - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) \, dV \\ &= \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{w} \, dV - \oint_{\partial \Omega} \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \, dA, \end{aligned} \quad (4.8)$$

²Ab sofort werden Integrale über Volumina oder Flächen der Übersicht halber mit einem einzigen Integralzeichen dargestellt.

wobei $\partial\Omega$ der Rand des Gebiets ist. Dieser setzt sich zusammen aus einem DIRICHLET-Rand $\partial\Omega_D$ und einem NEUMANN-Rand $\partial\Omega_N$:

$$\partial\Omega = \partial\Omega_D \cup \partial\Omega_N . \quad (4.9)$$

Durch die Produktregel und dem Satz von GAUSS konnte die zweite Ableitung der Geschwindigkeit um eine Ordnung reduziert werden. Das bedeutet die Lösung muss nicht mehr zweimal, sondern nur noch einmal stetig differenzierbar sein. Zusammenfassend ergibt sich:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (-\nabla^2 \mathbf{v} + \nabla p) \cdot \mathbf{w} \, dV &= \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{w} \, dV - \\ &- \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{w} \, dV - \oint_{\partial\Omega_N} (\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{v} - p \mathbf{n}) \cdot \mathbf{w} \, dA . \end{aligned} \quad (4.10)$$

Diese Beziehung wird in [Gleichung \(4.4\)](#) eingesetzt, um zu folgenden schwachen Formulierungen zu gelangen:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{v}) q \, dV &= 0 , \quad (4.11) \\ \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot \mathbf{w} \, dV + \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} \, dV - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{w} \, dV + \\ &+ \oint_{\partial\Omega_N} p \mathbf{n} \cdot \mathbf{w} \, dA + \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{w} \, dV - \\ &- \frac{1}{Re} \oint_{\partial\Omega_N} \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \, dA + \frac{Ra}{PeRe} \int_{\Omega} \Delta T \mathbf{g} \cdot \mathbf{w} \, dV = 0 . \end{aligned} \quad (4.12)$$

4.1.2. Schwache Formulierung der Feldgleichung für die Temperatur

Für die dimensionslose Feldgleichung [\(3.39\)](#) wird analog eine schwache Formulierung erhalten. Sei T die Ansatzfunktion und U die dazu passende Testfunktion, dann erhalten wir durch Multiplikation folgende Gleichung:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T \right) U = \frac{1}{Pe} \nabla^2 T U + 2 \frac{Ec}{Re} (\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}) U . \quad (4.13)$$

Auch hier soll die Gleichung auf dem Gebiet Ω berechnet werden. Die Integration über Ω liefert:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial T}{\partial t} U \, dV + \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla T) U \, dV = \frac{1}{Pe} \int_{\Omega} (\nabla^2 T) U \, dV + 2 \frac{Ec}{Re} \int_{\Omega} (\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}) U \, dV . \quad (4.14)$$

Der Integrand im ersten Term der rechten Seite lässt sich analog zu [Gleichung \(4.8\)](#) mit der Produktregel der Differentiation wie folgt umschreiben:

$$(\nabla^2 T) U = \nabla \cdot [(\nabla T) U] - \nabla T \cdot \nabla U . \quad (4.15)$$

In den obigen Gleichungen befindet sich weiterhin die Ableitung der Temperatur zweiter Ordnung nach dem Ort. Mit dem Satz von GAUSS lässt sich diese Ableitung jedoch um eine Ordnung reduzieren, vgl. etwa [Elman u. a. 2014], S. 13:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot [(\nabla T) U] \, dV = \oint_{\partial\Omega_N} (\mathbf{n} \cdot \nabla T) U \, dA . \quad (4.16)$$

Die [Gleichung \(4.16\)](#) wird in [Gleichung \(4.14\)](#) eingesetzt und anschließend können alle Terme auf die linke Seite gebracht werden, wodurch folgende schwache Formulierung gewonnen wird:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial T}{\partial t} U \, dV + \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla T) U \, dV - \frac{1}{Pe} \oint_{\partial\Omega_N} (\mathbf{n} \cdot \nabla T) U \, dA + \frac{1}{Pe} \int_{\Omega} \nabla T \cdot \nabla U \, dV - 2 \frac{Ec}{Re} \int_{\Omega} (\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}) U \, dV = 0 . \quad (4.17)$$

4.2. Zeitdiskretisierung

Differentialgleichungssysteme, die von Ort und Zeit abhängig sind, erfordern sowohl eine räumliche als auch eine zeitliche Diskretisierungen. Da die oben genannten Feldgleichungen beziehungsweise die schwachen Formulierungen instationär, also zeitlich abhängig sind, wird in diesem Abschnitt das für die Diskretisierung in der Zeit verwendete Verfahren vorgestellt.

Zeitdiskretisierungsverfahren werden nicht nur in explizite und implizite Verfahren, sondern auch in Einschnitt- oder Mehrschrittverfahren unterschieden. Generell handelt es sich dabei um numerische Lösungen von Anfangswertproblemen. Die expliziten Verfahren bieten einen Algorithmus zur Berechnung der

gesuchten Größe zum aktuellen Zeitschritt ausschließlich durch vorher berechnete oder vorgegebene Größen, wohingegen bei impliziten Verfahren die zur Berechnung benötigten Größen auch vom aktuellen Zeitschritt abhängig sein können. Letzteres führt dazu, dass zu jedem Zeitschritt ein zusätzliches lineares oder nicht-lineares Gleichungssystem gelöst werden muss und somit mehr Rechenkapazität erforderlich ist. Darüber hinaus wird bei Einschritt- oder Mehrschrittverfahren die Anzahl an vorher berechneten Stützpunkten, die in die Berechnung des aktuellen Zeitschritts mit einfließen, festgelegt.

Welches Verfahren oder welche Kombination von Verfahren für ein spezifisches Problem am besten geeignet ist, lässt sich nicht allgemein feststellen und setzt oft eine ausgiebige Analyse voraus. Dennoch lässt sich begründen, dass aufgrund der verschiedenen Eigenschaften der Terme in den Bilanzgleichungen sogenannte Implizit-Explizit-Verfahren, kurz IMEX-Verfahren, für die Simulation von Konvektionsströmungen geeignet sind, siehe [Ascher u. a. 1995].

4.2.1. IMEX-Verfahren 2. Ordnung

IMEX-Verfahren berechnen die nichtlinearen Terme einer Gleichung (semi-)explizit und die linearen, steifen Terme implizit. Dadurch wird der Nachteil von reinen impliziten Verfahren, dass zu jedem Zeitschritt eine zusätzliche Lösung eines nichtlinearen Systems in Kauf genommen werden muss, umgangen. Gleichzeitig werden die Anforderung der Stabilität des Verfahrens erfüllt. Zur Eigenschaft der Steifigkeit von partiellen Differentialgleichungen und ihre Auswirkung auf die Stabilität eines Verfahrens existieren vielfältige, jedoch im Wesentlichen ähnliche, Definitionen. Eine Definition von J. D. LAMBERT lautet, siehe [Lambert 1992]:

»If a numerical method with a finite region of absolute stability, applied to a system with any initial conditions, is forced to use in a certain interval of integration a steplength which is excessively small in relation to the smoothness of the exact solution in that interval, then the system is said to be stiff in that interval.«

Das Verfahren zur Zeitdiskretisierung soll das in [Ascher u. a. 1995] vorgestellte SBDF-Verfahren (engl. *semi-implicit backward differentiation formula*) sein, welches ein IMEX-Verfahren zweiter Ordnung ist und im Folgenden motiviert wird. Sei u die gesuchte Größe und seien in $f(u)$ und $g(u)$ jeweils nichtlineare und lineare, steife Terme definiert. Die zeitabhängige Konvektions-Diffusions-Gleichung, an der das IMEX-Verfahren zweiter Ordnung vorgestellt wird, lautet:

$$\dot{u} = f(u) + \lambda g(u), \quad \lambda > 0. \quad (4.18)$$

Das allgemeine IMEX-Verfahren zweiter Ordnung für obige Gleichung (4.18) ist in [Ascher u. a. 1995] mit zwei freien Parametern (γ, c) wie folgt definiert, vgl.

etwa [Ascher u. a. 1995], S. 802:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \left[\left(\gamma + \frac{1}{2} \right) u^{n+1} - 2\gamma u^n + \left(\gamma - \frac{1}{2} \right) u^{n-1} \right] &= (\gamma + 1)f(u^n) - \gamma f(u^{n-1}) + \\ &+ \lambda \left[\left(\gamma + \frac{c}{2} \right) g(u^{n+1}) + (1 - \gamma - c)g(u^n) + \frac{c}{2}g(u^{n-1}) \right], \end{aligned} \quad (4.19)$$

wobei die Superskripte $n + 1$, n und $n - 1$ jeweils die Größe des nächsten, des derzeitigen und des vorherigen Zeitschritts symbolisieren. Mathematisch formuliert bezieht sich das Superskript auf die Beziehung $u^{n+1} = u(t_{n+1})$. Durch entsprechende Wahl der zwei freien Parametern (γ, c) , lassen sich konkrete IMEX-Verfahren finden. Das SBDF-Verfahren wird mit $(\gamma, c) = (1, 0)$ erhalten, siehe [Ascher u. a. 1995], S. 803:

$$\frac{1}{2\Delta t} (3u^{n+1} - 4u^n + u^{n-1}) = 2f(u^n) - f(u^{n-1}) + \lambda g(u^{n+1}). \quad (4.20)$$

Diese Methodik wird analog auf das Differentialgleichungssystem, welches durch die Gleichungen (3.25), (3.26) und (3.30) beschrieben wird, übertragen. Zum Vergleich kann auch die Arbeit von Ahmed u. Rubino herangezogen werden, in der die NAVIER-STOKES-Gleichung mit dem SBDF-Verfahren, das in der Veröffentlichung *semi-implicit BDF2* genannt wird, diskretisiert wird. [Le Quééré 1991], S. 30, zeigt analog die zeitliche Diskretisierung der Feldgleichung für die Temperatur unter Vernachlässigung der durch Reibung hervorgerufenen Dissipation.

4.2.2. Zeitdiskretisierung der Impulsbilanz

Zunächst wird folgende Notation eingeführt, mit der das Integral eines FROBENIUS-Skalarprodukts zweier Tensoren \mathbf{A} und \mathbf{B} beliebiger Stufe über das Volumen Ω oder den dazugehörigen Rand $\partial\Omega$ dargestellt werden kann:

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B})_\Omega = \int_\Omega \mathbf{A} \star \mathbf{B} \, dV, \quad \langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle_{\partial\Omega} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{A} \star \mathbf{B} \, dA, \quad (4.21)$$

wobei das Symbol \star das FROBENIUS-Skalarprodukt beschreibt. Für die hergeleitete schwache Formulierung der Feldgleichung der Impulsbilanz in Gleichung (4.12) kann dann folgende Formulierung gefunden werden:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}, \mathbf{w} \right)_\Omega = f_I(\mathbf{v}; \mathbf{w}) + g_I(p, T, \mathbf{v}; q, \mathbf{w}), \quad (4.22)$$

wobei hier schon die Aufteilung der Gleichung in die nichtlinearen Terme $f_{\text{I}}(\mathbf{v}; \mathbf{w})$ und linearen Terme $g_{\text{I}}(p, T, \mathbf{v}; q, \mathbf{w})$ stattgefunden hat. Mit den Hilfsfunktionen³

$$\mathcal{A}(\phi, \psi) = (\nabla \phi, \nabla \psi)_{\Omega}, \quad \mathcal{A}(\phi, \psi, \chi)_{\partial\Omega} = \langle \phi \cdot \nabla \psi, \chi \rangle_{\partial\Omega}, \quad (4.23)$$

$$\mathcal{B}(\phi, \psi) = (\nabla \cdot \phi, \psi)_{\Omega}, \quad \mathcal{B}(\phi, \psi, \chi)_{\partial\Omega} = \langle \phi \cdot \psi, \chi \rangle_{\partial\Omega}, \quad (4.24)$$

$$\mathcal{C}(\phi, \psi, \chi) = (\phi \cdot \nabla \psi, \chi)_{\Omega}, \quad \mathcal{D}(\phi, \psi, \chi) = (\phi, \psi \Delta \chi)_{\Omega}, \quad (4.25)$$

können die Funktionen f_{I} und g_{I} folgendermaßen formuliert werden. Die nichtlineare Funktion

$$f_{\text{I}}(\mathbf{v}; \mathbf{w}) = -\mathcal{C}(\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \quad (4.26)$$

enthält lediglich den konvektiven Term der Impulsbilanz, während in der linearen Funktion

$$g_{\text{I}}(p, T, \mathbf{v}; q, \mathbf{w}) = -\frac{1}{Re} \mathcal{A}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \frac{1}{Re} \mathcal{A}(\mathbf{n}, \mathbf{v}, \mathbf{w})_{\partial\Omega} + \mathcal{B}(\mathbf{w}, p) - \mathcal{B}(\mathbf{n}, \mathbf{w}, p)_{\partial\Omega} + \frac{Ra}{PeRe} \mathcal{D}(\mathbf{g}, \mathbf{w}, T) \quad (4.27)$$

die restlichen Terme definiert sind, siehe [Gleichung \(4.12\)](#). Mit der Vorschrift in [Gleichung \(4.20\)](#) erhalten wir die sowohl örtlich als auch zeitlich diskrete Form wie folgt, vgl. etwa [Ahmed u. Rubino 2018], S. 27:

$$\mathcal{B}(\mathbf{v}^{n+1}, q) = 0, \quad (4.28)$$

$$\frac{1}{2\Delta t} [3(\mathbf{v}^{n+1}, \mathbf{w})_{\Omega} - 4(\mathbf{v}^n, \mathbf{w})_{\Omega} + (\mathbf{v}^{n-1}, \mathbf{w})_{\Omega}] = 2f_{\text{I}}(\mathbf{v}^n, \mathbf{v}^{n+1}; \mathbf{w}) - f_{\text{I}}(\mathbf{v}^{n-1}, \mathbf{v}^{n+1}; \mathbf{w}) + g_{\text{I}}(p, T, \mathbf{v}; q, \mathbf{w}), \quad (4.29)$$

Die endgültig implementierte schwache Formulierung mit dem SBDF-Verfahren lautet nach dem Zusammenführen von [Gleichung \(4.28\)](#) und [Gleichung \(4.29\)](#) wie folgt:

$$\frac{1}{2\Delta t} [3(\mathbf{v}^{n+1}, \mathbf{w})_{\Omega} - 4(\mathbf{v}^n, \mathbf{w})_{\Omega} + (\mathbf{v}^{n-1}, \mathbf{w})_{\Omega}] - 2f_{\text{I}}(\mathbf{v}^n, \mathbf{v}^{n+1}; \mathbf{w}) + f_{\text{I}}(\mathbf{v}^{n-1}, \mathbf{v}^{n+1}; \mathbf{w}) - g_{\text{I}}(p, T, \mathbf{v}; q, \mathbf{w}) - \mathcal{B}(\mathbf{v}^{n+1}, q) = 0. \quad (4.30)$$

4.2.3. Zeitdiskretisierung der Feldgleichung für die Temperatur

Die Aufteilung der schwachen Formulierung der Feldgleichung für die Temperatur in [Gleichung \(4.17\)](#) wird analog vorgenommen:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}, U \right)_{\Omega} = f_{\text{II}}(T, \mathbf{v}, \mathbf{d}; U) + g_{\text{II}}(T; U). \quad (4.31)$$

³Aufgrund des Umfangs der Gleichungen wird in der Arbeit wiederholt auf die Hilfsfunktionen zurückgegriffen.

Die Funktionen f_{II} und g_{II} lauten:

$$f_{\text{II}}(T, \mathbf{v}, \mathbf{d}; U) = -\mathcal{C}(\mathbf{v}, T, U) + 2\frac{Ec}{Re}(\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}, U)_{\Omega} , \quad (4.32)$$

$$g_{\text{II}}(T; U) = -\frac{1}{Pe}(\nabla T, \nabla U)_{\Omega} + \frac{1}{Pe}(\mathbf{n} \cdot \nabla T, U)_{\partial\Omega} , \quad (4.33)$$

Das SBDF-Verfahren schreibt folgende zeitliche Diskretisierung für die schwache Formulierung in [Gleichung \(4.17\)](#) vor, vgl. [Le Quéré 1991], S. 30:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\Delta t} [3(T^{n+1}, U)_{\Omega} - 4(T^n, U)_{\Omega} + (T^{n-1}, U)_{\Omega}] - 2f_{\text{II}}(T^n, \mathbf{v}^n, \mathbf{d}^n; U) + \\ + f_{\text{II}}(T^{n-1}, \mathbf{v}^{n-1}, \mathbf{d}^{n-1}; U) - g_{\text{II}}(T^{n+1}; U) = 0 . \end{aligned} \quad (4.34)$$

4.3. Numerische Methoden zur Lösung von nichtlinearen Gleichungssystemen

Die numerischen Methoden, die für die Lösung von nichtlinearen Differentialgleichungssystemen verwendet werden, beschränken sich auf zwei verschiedene Strategien. Es handelt sich einerseits um das NEWTON-RAPHSON-Verfahren und andererseits um die PICARD-Iteration als Fixpunktvariante. Eine ausführliche Analyse der Methoden bezüglich der Anwendung auf die diskrete NAVIER-STOKES-Gleichung ist in [Elman u. a. 2014], S. 400, zu finden. Im Folgenden werden die beiden Methoden anhand der NAVIER-STOKES-Gleichung motiviert, wobei von einer stationären, inkompressiblen Strömung mit vernachlässigten Volumenkraftdichten ausgegangen wird.

4.3.1. Newton-Raphson-Verfahren

Seien \mathbf{v}^{n+1} und p^{n+1} das jeweils gesuchte, diskrete Geschwindigkeits- und Druckfeld der aktuellen Iteration und seien \mathbf{v}^n und p^n das jeweils berechnete Geschwindigkeits- und Druckfeld der letzten Iteration. Ferner seien die gesuchten Größen $(\mathbf{v}^{n+1}, p^{n+1})$ additiv aus den Lösungen der letzten Iteration (\mathbf{v}^n, p^n) und den jeweiligen Updates $(\delta\mathbf{v}^n, \delta p^n)$ zu berechnen. Die Iterationsvorschrift des NEWTON-RAPHSON-Verfahrens in dimensionsloser Form lautet dann wie folgt, vgl. etwa [Elman u. a. 2014], S. 345:

$$\nabla \cdot \delta\mathbf{v}^n = 0 , \quad (4.35)$$

$$\delta\mathbf{v}^n \cdot \nabla \mathbf{v}^n + \mathbf{v}^n \cdot \nabla \delta\mathbf{v}^n - \frac{1}{Re} \nabla \delta\mathbf{v}^n \cdot \nabla \mathbf{v}^n - \delta p^n \nabla \mathbf{v}^n = \mathbf{0} \quad (4.36)$$

mit den Beziehungen

$$\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^n + \delta\mathbf{v}^n, \quad p^{n+1} = p^n + \delta p^n. \quad (4.37)$$

In [Gleichung \(4.36\)](#) und [Gleichung \(4.35\)](#) wird nach den Größen $\delta\mathbf{v}^n$ und δp^n gelöst, um sie anschließend für die Bestimmung von \mathbf{v}^{n+1} und p^{n+1} zu nutzen.

4.3.2. Picard-Iteration

Die Formulierung der Fixpunktvariante der PICARD-Iteration, angewandt auf die NAVIER-STOKES-Gleichung, lautet hingegen, vgl. etwa [Elman u. a. 2014], S. 346:

$$\nabla \cdot \mathbf{v}^{n+1} = 0, \quad (4.38)$$

$$\mathbf{v}^n \cdot \nabla \mathbf{v}^{n+1} - \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v}^{n+1} + \nabla p^{n+1} = \mathbf{0}. \quad (4.39)$$

Das Ersetzen des ursprünglich nichtlinearen Terms durch die Multiplikation von \mathbf{v}^n und $\nabla \mathbf{v}^{n+1}$ stellt eine Linearisierung dar. Diese Methode lässt sich aber auch als Update-Variante formulieren. Das ist zwar nicht zwingend notwendig, erweist sich allerdings bei der Programmierung mit *FeniCS* als übersichtlicher. Die PICARD-Iteration als Update-Variante erhält man durch folgende Substitution:

$$\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^n + \delta\mathbf{v}^n, \quad p^{n+1} = p^n + \delta p^n. \quad (4.40)$$

Somit ergibt sich für [Gleichung \(4.39\)](#) folgende Iterationsvorschrift, siehe [Elman u. a. 2014], S. 345:

$$\nabla \cdot \delta\mathbf{v}^n = 0, \quad (4.41)$$

$$\mathbf{v}^n \cdot \nabla (\mathbf{v}^n + \delta\mathbf{v}^n) - \frac{1}{Re} \nabla^2 (\mathbf{v}^n + \delta\mathbf{v}^n) + \nabla (p^n + \delta p^n) = \mathbf{0}, \quad (4.42)$$

wobei in [Gleichung \(4.41\)](#) die Beziehung $\nabla \cdot \mathbf{v}^n = 0$ bereits beachtet wird. Die beiden aufgeführten Iterationsvorschriften haben Vor- und Nachteile. Der hauptsächliche Nachteil des NEWTON-RAPHSON-Verfahrens ist der proportionale Zusammenhang zwischen dem Konvergenzradius und der Viskosität. Falls also die REYNOLDS-Zahl erhöht wird, verringert sich der Konvergenzradius und genauere Anfangsbedingungen werden benötigt, um das NEWTON-RAPHSON-Verfahren konvergieren zu lassen. Auf der anderen Seite führt das Verfahren zu einer quadratischen Konvergenz, falls die Anfangsbedingungen ausreichend genau sind. In solchen Fällen ist die Konvergenzgeschwindigkeit höher als bei der PICARD-Iteration, die im Allgemeinen linear konvergiert. Der Vorteil der PICARD-Iteration ist allerdings, dass sie, verglichen mit dem NEWTON-RAPHSON-Verfahren, einen größeren Konvergenzradius besitzt, siehe [Elman u. a. 2014], S. 346.

In [Elman u. a. 2014] wird deshalb eine Kombination der beiden Verfahren vorgeschlagen, welche in dieser Arbeit *Hybrid-Solver* genannt wird. Dieses Verfahren berechnet eine Näherungslösung mit der PICARD-Iteration (aufgrund des höheren Konvergenzradius), bis der Fehler gering genug ist, um anschließend mit dem NEWTON-RAPHSON-Verfahren eine schnellere, im günstigsten Fall quadratische, Konvergenz zu erhalten.

5. Numerische Berechnung von Beispielproblemen

Dieses Kapitel handelt von numerischen Lösungen ausgewählter Benchmarktests, die zur Validierung der implementierten Programme dienen sollen und der anschließenden konkreten numerischen Behandlung von Konvektionsströmungen im äußeren Erdkern.

5.1. Stationäre Nischenströmung

Akkurate strömungstechnische Simulationen innerhalb geschlossener Geometrien sind in der Strömungsmechanik von großem Interesse. Ein solches Beispiel bildet die sogenannte Nischenströmung (engl. *lid-driven cavity flow*). Die Simulation der Nischenströmung wird in der Strömungsmechanik konventionell angestrebt, um die Ergebnisse von neuen numerischen Verfahren oder Programmen bezüglich ihrer Korrektheit und Genauigkeit zu untersuchen. Dadurch, dass die geschlossene Geometrie der Nische und die Randbedingungen einfach gehalten sind, können die Ergebnisse leicht nachvollzogen werden.

5.1.1. Problembeschreibung

Bei dem Benchmarktest der Nischenströmung handelt es sich um eine zweidimensionale, quadratische Geometrie $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, wie in [Abbildung 5.1](#) dargestellt, an deren Ränder lediglich DIRICHLET-Bedingungen für die Geschwindigkeit vorgegeben sind. Die Berechnung erfolgt unter der Annahme einer stationären Strömung, wobei auch Instationaritäten bei der Nischenströmungen auftreten können. Dies geschieht allerdings erst bei vergleichsweise hohen REYNOLDS-Zahlen, die in dieser Arbeit nicht betrachtet werden. Die zur Beschreibung der Nischenströmung benötigten Gleichungen sind die dimensionslose NAVIER-STOKES-Gleichung in [Gleichung \(3.33\)](#) und die Inkompressibilitätsbedingung, wobei die Volumenkraftdichte und die partielle Zeitableitung vernachlässigt werden, sodass die dimensionslose Formulierung wie folgt lautet:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \nabla p - \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (5.1)$$

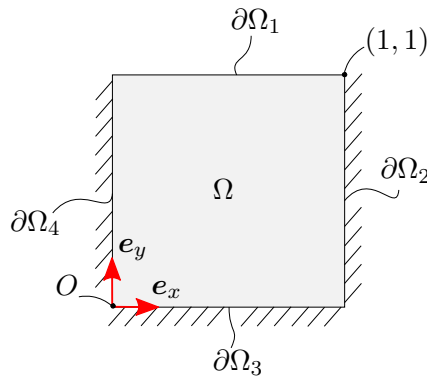


Abb. 5.1.: Skizze der Geometrie des Problems mit den jeweiligen Rändern. Der Ursprung des Koordinatensystems ist mit dem Symbol O gekennzeichnet.

Die DIRICHLET-Bedingungen für das gegebene Problem sind Folgende:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = v_0 \mathbf{e}_x \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_1, \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_3 \cup \partial\Omega_4. \quad (5.2)$$

Lediglich auf dem oberen Rand $\partial\Omega_1$ ist in x -Richtung eine Geschwindigkeit von v_0 vorgegeben. Diese hat zur Folge, dass auch das Fluid zur Bewegung angeregt wird und sich Wirbel in der Nische ausbilden. Für die verbleibenden Ränder gilt die sogenannte Haftbedingung (engl. *no slip condition*). Die Berechnung findet daher in einem geschlossenen Gebiet ohne Ein- oder Ausströmbedingungen statt.

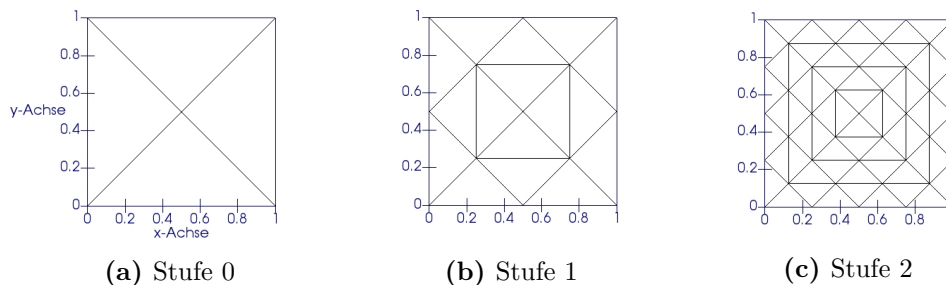


Abb. 5.2.: Graphische Darstellung der Stufen der Verfeinerungen des Netzes.

Das für die Berechnung verwendete Netz besteht aus gleichschenkligen, rechtwinkligen Dreieckselementen. In [Abbildung 5.2](#) ist dargestellt, wie die Verfeinerung des Netzes aufgebaut ist. Beginnend mit der Stufe null werden bis zu sechs Verfeinerungen durchgeführt, sodass ein für das Problem geeignetes Netz erzeugt wird. Mit jeder Stufe vervierfacht sich die Anzahl der Elemente. Der Feinheitsgrad der jeweiligen Stufe kann der [Tabelle 5.1](#) entnommen werden.

Stufe	Freiheitsgrade			Elemente
	Geschwindigkeit	Druck	Gesamt	
0	31	9	40	4
1	82	13	95	16
2	290	41	331	64
3	1090	145	1235	256
4	4226	545	4771	1024
5	16 642	2113	18 755	4096
6	66 050	8321	74 371	16 384

Tab. 5.1.: Konfigurationen der Freiheitsgrade für die Berechnung der Nischenströmung.

5.1.2. Schwache Formulierung

Die schwache Formulierung lautet wie folgt: Finde \mathbf{v} und p , sodass

$$\mathcal{B}(\mathbf{v}, q) = 0, \quad \frac{1}{Re} \mathcal{A}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) - \mathcal{B}(\mathbf{w}, p) + \mathcal{C}(\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0 \quad (5.3)$$

$\forall \mathbf{w}, q$ erfüllt ist. Die schwache Formulierung lässt sich erhalten, indem der Operator \mathcal{A} auf den diffusiven Term der [Gleichung \(5.1\)₂](#) angewandt wird, während der Konvektionsterm durch die Anwendung von \mathcal{C} beschrieben ist. Außerdem werden die schwachen Formulierungen des Druckgradienten und der Inkompressibilitätsbedingung durch die in \mathcal{B} definierte Operation erhalten.

5.1.3. Ergebnisse und Diskussion

Die Validierung der Ergebnisse bezüglich der Nischenströmung erfolgt durch den Vergleich des in [Ghia u. a. 1982] vorgestellten Benchmarks. In der Veröffentlichung wird die dimensionslose Geschwindigkeit auf dem oberen Rand auf $v_0 = 1$ festgelegt. Anhand der in [Abbildung 5.3](#) vorgestellten Geschwindigkeitsfelder lassen sich die Charakteristika dieser Strömung feststellen. Je höher die REYNOLDS-Zahl ist, desto näher rückt das Zentrum des Wirbels an das geometrische Zentrum, vgl. etwa [Abbildung 5.3a](#) mit [Abbildung 5.3d](#). Ein weiteres Merkmal dieser Strömung sind die kleineren sekundären Wirbel, sogenannte *Eddies*, die sich in den Ecken des Gebietes ausbilden und mit steigender REYNOLDS-Zahl größer werden, siehe [Moffatt 1964]. Die dargestellten Berechnungen basieren auf Netzen der Stufe sechs.

Des Weiteren wird in [Abbildung 5.4](#) ein Vergleich zwischen den berechneten und den in [Ghia u. a. 1982] gegebenen horizontalen Geschwindigkeiten $v_x(x = 0,5)$

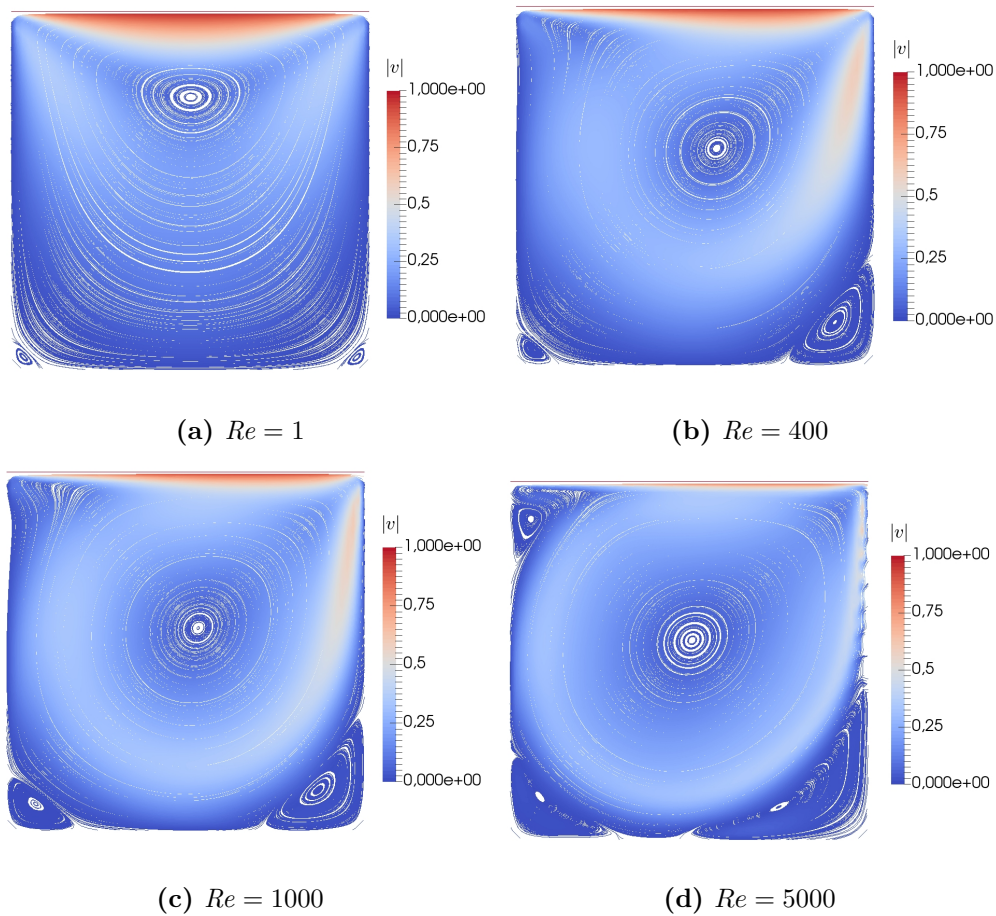


Abb. 5.3.: Graphische Darstellung der Stromlinien des Geschwindigkeitsfeldes, wobei der Betrag der Geschwindigkeit farblich hervorgehoben ist.

gezeigt. Es ist zu erkennen, dass die Graphen eine Übereinstimmung mit den Referenzwerten aufweisen. Lediglich die Berechnungen mit $Re = 5000$ in [Abbildung 5.4c](#) liegen offensichtlich leicht abseits von den Referenzwerten. Der Grund dafür ist vermutlich die geringere Anzahl der verwendeten Elemente. Dies wird deutlich, wenn die jeweiligen Berechnungen mit 64×64 (Stufe 5) und 128×128 (Stufe 6) Elementen miteinander verglichen werden. Die gestrichelten Graphen, die mit 64×64 Elementen berechnet wurden, weichen in allen Berechnungen deutlich stärker von der Referenz ab als die durchgezogenen Graphen mit 128×128 Elementen. Eine zusätzliche Verfeinerung des Netzes kann die Abweichung der Ergebnisse verringern, jedoch wird in Anbetracht des damit verbundenen Rechenaufwands auf die Berechnung verzichtet. Der Vergleich der Ergebnisse mit dem Benchmark ist somit abgeschlossen.

Des Weiteren wird in [Abbildung 5.5](#) der Vorteil des *Hybrid-Solvers* gegenüber

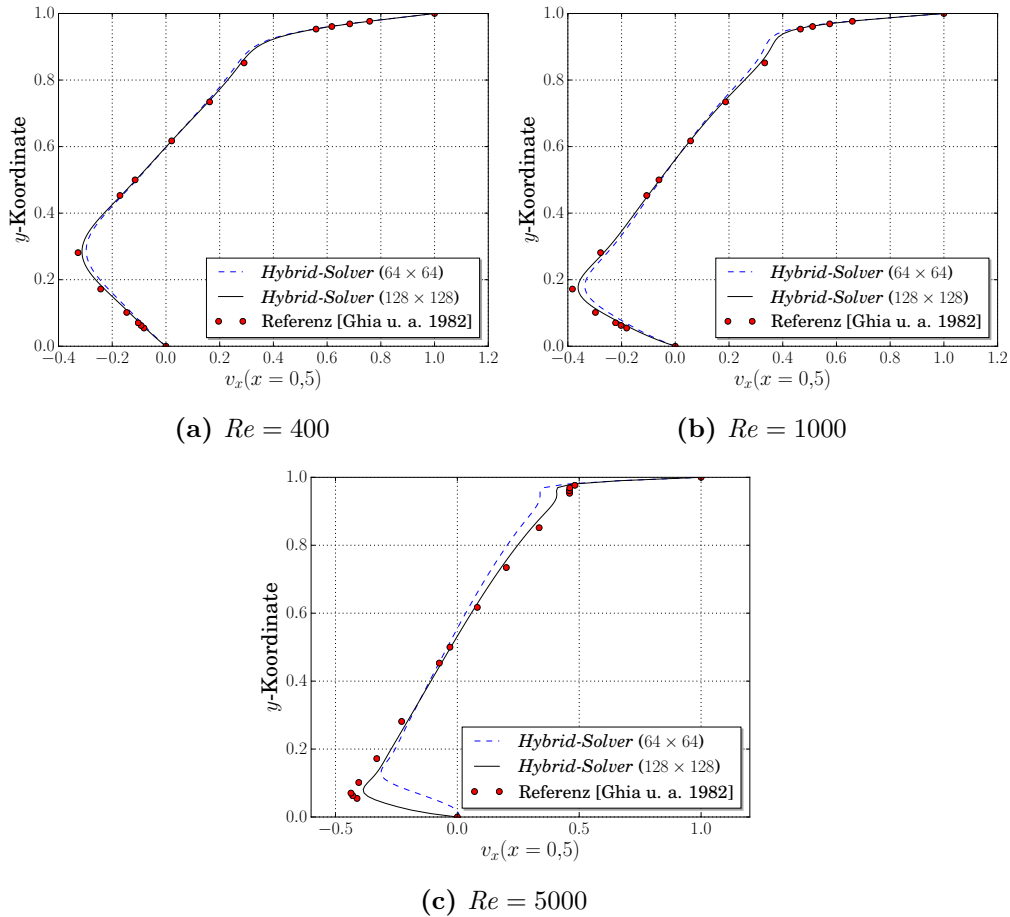


Abb. 5.4.: Graphen zur Validierung der horizontalen Geschwindigkeit $v_x(x = 0,5)$ der Nischenströmung für verschiedene REYNOLDS-Zahlen.

dem reinen NEWTON-RAPHSON-Verfahren im Hinblick auf die Berechnung der Nischenströmung ersichtlich. Das Residuum r , welches in jeder Iteration berechnet wird, wird wie folgt gebildet:

$$r = \frac{1}{Re} \mathcal{A}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \mathcal{C}(\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) - \mathcal{B}(\mathbf{w}, p) - \mathcal{B}(\mathbf{v}, q) \stackrel{!}{=} 0. \quad (5.4)$$

Die Berechnung wird mit dem *Hybrid-Solver* für REYNOLDS-Zahlen von $Re = 1$, $Re = 400$ und $Re = 3000$ und mit dem NEWTON-RAPHSON-Verfahren für eine REYNOLDS-Zahl von $Re = 400$ durchgeführt. Das Abbruchkriterium wird auf eine Genauigkeit von $r_{\text{abbr.}} = 10^{-11}$ gesetzt. Liegt das Residuum unter der Schwelle des Abbruchkriteriums, so findet keine weitere Iteration statt. Für hohe REYNOLDS-Zahlen von über 550 ist eine Konvergenz mit dem reinen NEWTON-RAPHSON-Verfahren nicht zu erreichen. Auf der anderen Seite erreicht der *Hybrid-Solver* bei einer REYNOLDS-Zahl von $Re = 3000$ nach fünf

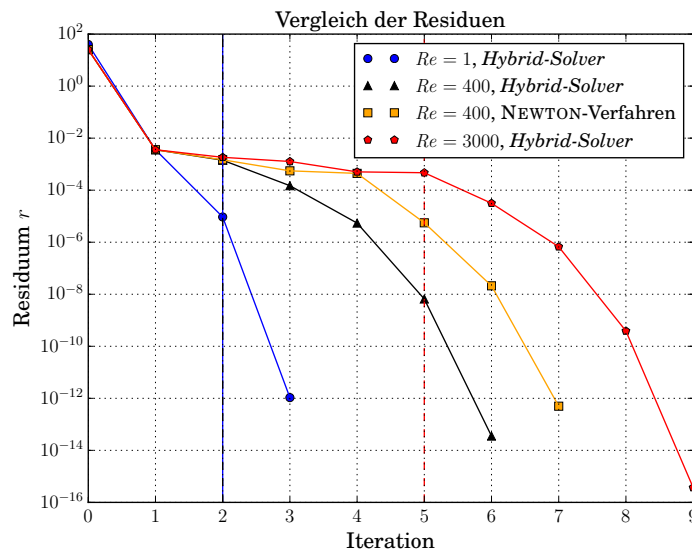


Abb. 5.5.: Vergleich der berechneten Residuen des jeweiligen Iterationsschrittes. Die Verfahren, die verglichen werden, sind der *Hybrid-Solver* und das NEWTON-RAPHSON-Verfahren bzgl. verschiedener REYNOLDS-Zahlen. Die vertikal verlaufenden, gestrichelten Trennlinien weisen durch ihre Farbe und Position auf die in den *Hybrid-Solvern* stattgefundenen Wechsel von der PICARD-Iteration zum NEWTON-RAPHSON-Verfahren hin.

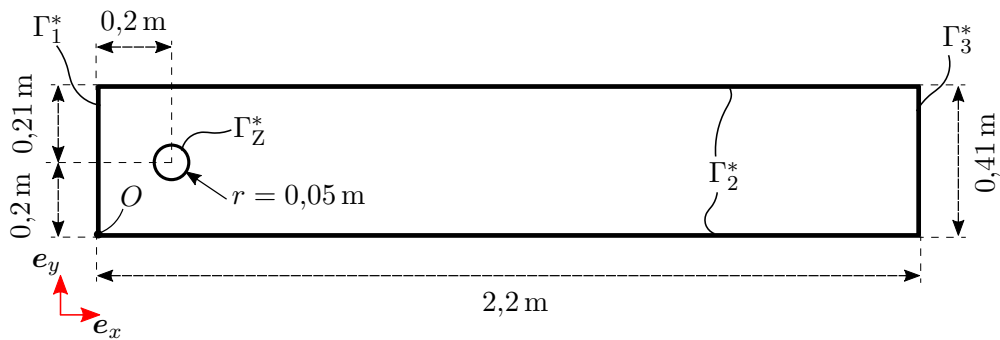
PICARD-Iterationen und dem anschließenden Wechsel auf das NEWTON-RAPHSON-Verfahren das Kriterium für vielfach höhere REYNOLDS-Zahlen. Außerdem zeigt ein direkter Vergleich der maximal benötigten Iterationen des jeweiligen Verfahrens für $Re = 400$, dass der *Hybrid-Solver* nach sechs Iterationen das Kriterium erfüllt. Das NEWTON-RAPHSON-Verfahren hingegen benötigt einen zusätzlichen Iterationsschritt, um das Abbruchkriterium zu erfüllen und weist dementsprechend eine langsamere Konvergenzgeschwindigkeit auf.

5.2. Instationäre Kármánsche-Wirbelstraße

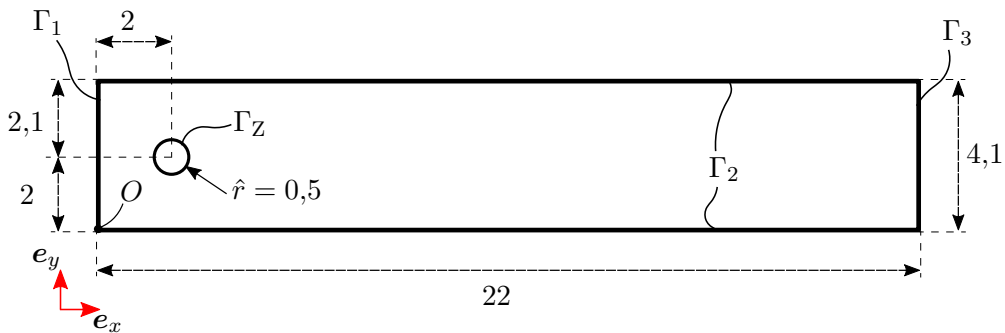
Als anschließendes Testproblem wird die KÁRMÁNSche-Wirbelstraße simuliert, um sicherzustellen, dass die Zeitdiskretisierung der NAVIER-STOKES-Gleichung korrekt implementiert ist und die Wahl der finiten Elemente geeignet sind. Das in den Veröffentlichungen [John 2004] und [Schäfer u. a. 1996] beschriebene Testproblem dient als Referenz, wobei die für die Validierung genutzten Werte am Beispiel einer modifizierten Geometrie berechnet wurden, siehe [FeatFlow].

5.2.1. Problembeschreibung

Abbildung 5.6a stellt die Skizze der dimensionsbehafteten Geometrie des Testproblems dar. Es handelt sich dabei um einen Strömungskanal mit der Geometrie $\Omega = [0 \text{ m}, 2,2 \text{ m}] \times [0 \text{ m}, 0,41 \text{ m}] \setminus \Gamma_Z^*$, innerhalb dessen ein fest fixierter Körper asymmetrisch angeströmt wird. Das Phänomen, welches infolgedessen eintritt, sind gegenläufige Wirbel, die sich hinter dem umströmten Körper periodisch ablösen. Das charakteristische Verhalten der periodischen Wirbelablösung hängt im Wesentlichen von der REYNOLDS-Zahl ab. Dazu wird das Problem im Folgenden dimensionslos formuliert.



(a) Skizze der dimensionsbehafteten Geometrie.



(b) Skizze der entdimensionierten Geometrie.

Abb. 5.6.: Graphische Darstellungen des Strömungskanals in dimensionsbehafteter und dimensionsloser Form. Der Ursprung des Koordinatensystems ist mit dem Symbol O gekennzeichnet.

Die zu lösenden Gleichungen erhalten wir aus der dimensionsbehafteten NAVIER-STOKES-Gleichung¹ für inkompressible Fluide unter Vernachlässigung der

¹In diesem Abschnitt wird die in Gleichung (3.31) eingeführte Notation für dimensionslose Größen wieder genutzt, um eine Verwechslung zu vermeiden.

Volumenkraftdichte. Somit erhalten wir folgende Formulierung:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p - \nu \nabla^2 \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (5.6)$$

mit $\rho_0 = 1 \text{ kg m}^{-3}$ und $\nu = 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, was der Viskosität von flüssigem Wasser entspricht, vgl. etwa [John 2004], S. 779. Um die REYNOLDS-Zahl auf einen Wert festlegen zu können, müssen die charakteristischen Größen der Strömung bestimmt werden. In [FeatFlow] wird die charakteristische Länge l_{ref} auf den dimensionsbehafteten Durchmesser des umströmten Kreises bezogen und liegt somit bei $l_{\text{ref}} = 0,05 \text{ m}$, siehe [Abbildung 5.6a](#). Weiterhin wird auf dem linken Rand Γ_1^* eine parabolische Einströmgeschwindigkeit in Form einer DIRICHLET-Bedingung vorgegeben:

$$\mathbf{v}(0, y, t) = 6 \frac{y(h-y)}{h^2} \sin\left(\frac{\pi t}{8 \text{ s}}\right) \frac{\text{m}}{\text{s}} \mathbf{e}_x \quad (5.7)$$

mit $h = 0,41 \text{ m}$. Die Durchschnittsgeschwindigkeit v_* der Einströmung ist gegeben durch den Mittelwert \bar{v} :

$$\bar{v} = v_*(t) = 6 \sin\left(\frac{\pi t}{8 \text{ s}}\right) \frac{1}{h^2} \frac{\int_0^h y(h-y) dy}{h} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \sin\left(\frac{\pi t}{8 \text{ s}}\right) \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (5.8)$$

Die Funktion $v_*(t)$ in [Gleichung \(5.8\)](#) hat ihr Maximum zum Zeitpunkt $t = 4 \text{ s}$. Die maximale Durchschnittsgeschwindigkeit zu diesem Zeitpunkt ist $\bar{v}_{\text{max.}} = 1 \text{ m/s}$. Dieser Wert dient als charakteristische Geschwindigkeit für den Benchmarktest der KÁRMÁNSchen-Wirbelstraße, sodass $v_{\text{ref.}} = \bar{v}_{\text{max.}} = 1 \text{ m/s}$ gilt. Somit erhalten wir bei maximaler Einströmgeschwindigkeit eine REYNOLDS-Zahl von

$$Re = \frac{v_{\text{ref.}} l_{\text{ref.}}}{\nu} = \frac{1 \text{ m s}^{-1} 0,1 \text{ m}}{10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}} = 100. \quad (5.9)$$

Für die charakteristischen Größen $t_{\text{ref.}}$ und $p_{\text{ref.}}$ gelten folgende Beziehungen:

$$t_{\text{ref.}} = \frac{l_{\text{ref.}}}{v_{\text{ref.}}} = \frac{0,1 \text{ m}}{1 \text{ m s}^{-1}} = 0,1 \text{ s}, \quad p_{\text{ref.}} = v_{\text{ref.}}^2 \rho_0 = 1 \text{ kg s}^{-2} \text{ m}^{-1}. \quad (5.10)$$

Weiterhin wird gefordert, dass die Geschwindigkeiten sowohl am oberen und unteren Rand als auch am Rand des umströmten Kreises gleich null seien sollen. Folgende Haftbedingungen gelten demzufolge:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)|_{\Gamma_2^*} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)|_{\Gamma_Z^*} = \mathbf{0}. \quad (5.11)$$

Der rechte Rand Γ_3^* erhält keine spezifische Vorgabe, sodass eine einfache Aus-

strömbedingung (engl. *do-nothing boundary condition*) mit

$$\nu \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{v} - \mathbf{n} p = \mathbf{0} \quad (5.12)$$

auf $\Gamma_3^* \equiv \partial\Omega_N$ gegeben ist. Die Anfangsbedingungen für die Geschwindigkeit und den Druck lauten:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)|_{t=0} = \mathbf{0}, \quad p(\mathbf{x}, t)|_{t=0} = 0. \quad (5.13)$$

Aufgrund der Entdimensionalisierung wird die Geometrie in [Abbildung 5.6a](#) angepasst, sodass für die endgültige dimensionslose Berechnung die in [Abbildung 5.6b](#) dargestellte Geometrie genutzt wird. Wie zu erkennen ist, wird die dimensionsbehaftete Geometrie mit dem Skalierungsfaktor $1/l_{\text{ref}}$ skaliert. Die Vernetzung der Geometrie ist in [Abbildung 5.7](#) dargestellt. Außerdem können der [Tabelle 5.2](#) die Konfigurationen der Freiheitsgrade entnommen werden. Das Netz ist in 5112 Dreieckselemente aufgeteilt mit einer gesamten Anzahl an Freiheitsgraden von 23579. Davon sind 2671 Freiheitsgrade für den Druck und 20908 Freiheitsgrade für die Geschwindigkeit bestimmt. Die Berechnung des Benchmarks hingegen erfolgte mit insgesamt 667264 Freiheitsgraden, siehe [FeatFlow]. Berechnungen mit ähnlich feinen Netzauflösungen ließen sich aufgrund der limitierten Rechenleistung nicht realisieren.

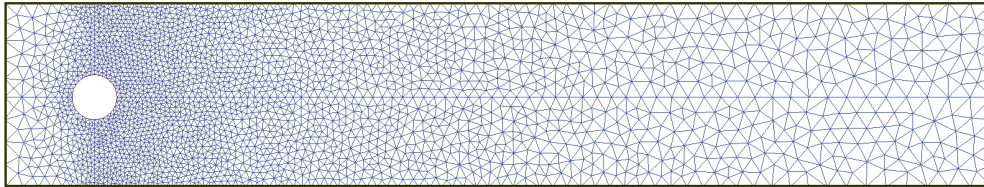


Abb. 5.7.: Vernetzung des Strömungskanals.

	Freiheitsgrade			Elemente
	Geschwindigkeit	Druck	Gesamt	
Eigene Berechnung	20 908	2671	23 579	5112
Referenz [FeatFlow]			667 264	133 120

Tab. 5.2.: Konfiguration der Freiheitsgrade für die Berechnung der KÁRMÁNsche-Wirbelstraße.

5.2.2. Schwache und zeitdiskrete Formulierung

Die schwache Formulierung des Differentialgleichungssystems in dimensionsloser Form lautet wie folgt: Finde $\hat{\mathbf{v}}$ und \hat{p} , sodass

$$\mathcal{B}(\hat{\mathbf{v}}, q) = 0, \quad \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{v}}}{\partial t}, \mathbf{w} \right)_{\Omega} + \mathcal{C}(\hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{v}}, \mathbf{w}) + \frac{1}{Re} \mathcal{A}(\hat{\mathbf{v}}, \mathbf{w}) - \mathcal{B}(\mathbf{w}, \hat{p}) = 0, \quad (5.14)$$

$\forall \mathbf{w}, q$ erfüllt ist. Die [Gleichungen \(5.14\)₁](#) und [\(5.14\)₂](#) werden mit drei verschiedenen Zeitdiskretisierungsverfahren, dem impliziten EULER-Verfahren in [Gleichung \(5.15\)](#), dem impliziten CRANK-NICOLSON-Verfahren in [\(5.16\)](#) und dem SBDF-Verfahren in [\(5.17\)](#), jeweils diskretisiert und berechnet, um auch einen internen Vergleich zu ermöglichen. Die drei verschiedenen Formulierungen lauten wie folgt:

- Implizites EULER-Verfahren:

$$\begin{aligned} & \left(\hat{\mathbf{v}}^{n+1}, \mathbf{w} \right)_{\Omega} - \left(\hat{\mathbf{v}}^n, \mathbf{w} \right)_{\Omega} + \frac{\Delta \hat{t}}{Re} \mathcal{A}(\hat{\mathbf{v}}^{n+1}, \mathbf{w}) + \\ & + \Delta \hat{t} \mathcal{C}(\hat{\mathbf{v}}^{n+1}, \hat{\mathbf{v}}^{n+1}, \mathbf{w}) - \Delta \hat{t} \mathcal{B}(\mathbf{w}, p^{n+1}) - \Delta \hat{t} \mathcal{B}(\hat{\mathbf{v}}^{n+1}, q) = 0, \end{aligned} \quad (5.15)$$

- Implizites CRANK-NICOLSON-Verfahren:

$$\begin{aligned} & \left(\hat{\mathbf{v}}^{n+1}, \mathbf{w} \right)_{\Omega} - \left(\hat{\mathbf{v}}^n, \mathbf{w} \right)_{\Omega} + \frac{\Delta \hat{t}}{2Re} \left[\mathcal{A}(\hat{\mathbf{v}}^{n+1}, \mathbf{w}) + \mathcal{A}(\hat{\mathbf{v}}^n, \mathbf{w}) \right] + \\ & + \frac{\Delta \hat{t}}{2} \left[\mathcal{C}(\hat{\mathbf{v}}^{n+1}, \hat{\mathbf{v}}^{n+1}, \mathbf{w}) + \mathcal{C}(\hat{\mathbf{v}}^n, \hat{\mathbf{v}}^n, \mathbf{w}) \right] - \\ & - \Delta \hat{t} \mathcal{B}(\mathbf{w}, p^{n+1}) - \Delta \hat{t} \mathcal{B}(\hat{\mathbf{v}}^{n+1}, q) = 0, \end{aligned} \quad (5.16)$$

- SBDF-Verfahren:

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2} \left(\hat{\mathbf{v}}^{n+1}, \mathbf{w} \right)_{\Omega} + \frac{\Delta \hat{t}}{Re} \mathcal{A}(\hat{\mathbf{v}}^{n+1}, \mathbf{w}) + 2\Delta \hat{t} \mathcal{C}(\hat{\mathbf{v}}^n, \hat{\mathbf{v}}^{n+1}, \mathbf{w}) - \\ & - \Delta \hat{t} \mathcal{C}(\hat{\mathbf{v}}^{n-1}, \hat{\mathbf{v}}^{n+1}, \mathbf{w}) - \Delta \hat{t} \mathcal{B}(\mathbf{w}, p^{n+1}) - \Delta \hat{t} \mathcal{B}(\hat{\mathbf{v}}^{n+1}, q) \\ & = 2 \left(\hat{\mathbf{v}}^n, \mathbf{w} \right)_{\Omega} - \frac{1}{2} \left(\hat{\mathbf{v}}^{n-1}, \mathbf{w} \right)_{\Omega}, \end{aligned} \quad (5.17)$$

5.2.3. Ergebnisse und Diskussion

Die Berechnungen werden für die dimensionslose Zeitspanne $\hat{t} \in [0, 80]$ mit einem konstanten dimensionslosen Zeitschritt von $\Delta \hat{t} = 1,25 \times 10^{-4}$ durchgeführt, was einer physikalischen Zeit von 8 Sekunden entspricht. Die in [Abbildung 5.8](#) dargestellten Geschwindigkeitsfelder zeigen die Entwicklung der Strömung. Das

dafür verwendete Zeitdiskretisierungsverfahren ist das implizite CRANK-NICOLSON-Verfahren, wobei die Ergebnisse der verschiedenen Verfahren optisch kaum voneinander zu unterscheiden sind. Wie zu erkennen ist, bilden sich mit steigender Einströmgeschwindigkeit bereits nach zwei Sekunden Wirbel hinter dem umströmten Körper aus, siehe $t = 2$ s und $t = 4$ s. Das Ablösen der Wirbel beginnt im Zeitraum zwischen $t = 4$ s und $t = 5$ s. Die voll ausgebildete KÁRMÁNSche-Wirbelstraße ist zum Zeitpunkt $t = 8$ s zu sehen, vgl. [John 2004], S. 779.

Die abschließende Validierung erfolgt über den Widerstands- und Auftriebsbeiwert $c_d(t)$ und $c_l(t)$. Die Formulierungen zur Berechnung der beiden Koeffizienten sind in [John 2004], S. 780, gegeben, wobei die Gleichungen hinsichtlich der vorangegangenen Entdimensionalisierung wie folgt angepasst werden müssen:

$$c_d(t) = -20l_{\text{ref}}^2 \int_{\Omega} \left(\frac{v_{\text{ref}} \nu}{l_{\text{ref}}^2} \hat{\nabla} \hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\nabla} \mathbf{w}_d + \frac{v_{\text{ref}}^2}{l_{\text{ref}}} \hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\nabla} \hat{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{w}_d - \frac{p_{\text{ref}}}{l_{\text{ref}}} \hat{p} \hat{\nabla} \mathbf{w}_d \right) \hat{d}x \hat{d}y, \quad (5.18)$$

$$c_l(t) = -20l_{\text{ref}}^2 \int_{\Omega} \left(\frac{v_{\text{ref}} \nu}{l_{\text{ref}}^2} \hat{\nabla} \hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\nabla} \mathbf{w}_l + \frac{v_{\text{ref}}^2}{l_{\text{ref}}} \hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\nabla} \hat{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{w}_l - \frac{p_{\text{ref}}}{l_{\text{ref}}} \hat{p} \hat{\nabla} \mathbf{w}_l \right) \hat{d}x \hat{d}y, \quad (5.19)$$

für alle Testfunktionen $\mathbf{w}_d \in H^1(\Omega)$ und $\mathbf{w}_l \in H^1(\Omega)$ mit $\mathbf{w}_d|_{\Gamma_Z} = \mathbf{e}_x$ und $\mathbf{w}_l|_{\Gamma_Z} = \mathbf{e}_y$. Das Symbol $H^1(\Omega)$ beschreibt den sogenannten SOBOLEV-Raum.

In der [Tabelle 5.3](#) werden die Ergebnisse der Maximalwerte präsentiert und mit der Referenz verglichen. Das in [FeatFlow] genutzte Zeitdiskretisierungsverfahren ist das CRANK-NICOLSON-Verfahren. Der Vergleich zeigt, dass die eigenen Berechnungen der Maximalwerte sehr geringe Abweichungen von der Referenz aufweisen.

	Δt	$t(c_{d,\max})$	$c_{d,\max}$	$t(c_{l,\max})$	$c_{l,\max}$
EULER-Verfahren	$\frac{1}{800}$ s	3,923 s	2,934	5,686 s	0,464
CRANK-NICOLSON-Verfahren	$\frac{1}{800}$ s	3,922 s	2,934	5,685 s	0,465
IMEX-Verfahren	$\frac{1}{800}$ s	3,922 s	2,934	5,686 s	0,465
Referenz [FeatFlow]	$\frac{1}{1600}$ s	3,937 s	2,944	5,693 s	0,477

Tab. 5.3.: Vergleich der maximalen Beiwerte in der Berechnung der KÁRMÁNSchen-Wirbelstraße.

Außerdem zeigt die [Abbildung 5.9](#) den direkten Vergleich der Koeffizienten über den gesamten Zeitraum $t \in [0 \text{ s}, 8 \text{ s}]$. Auch an dieser Stelle ist festzustellen, dass

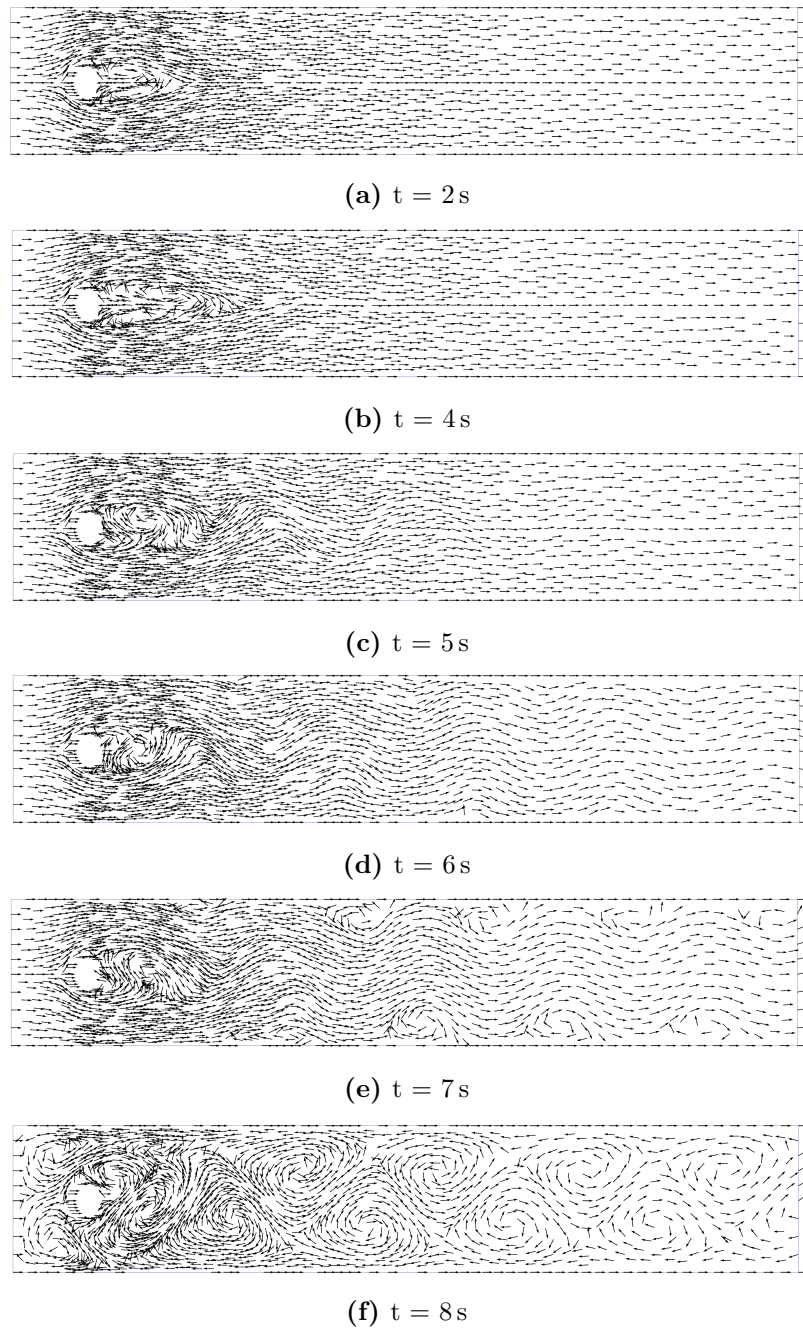


Abb. 5.8.: Graphische Darstellung der einheitlichen Geschwindigkeitsvektoren nach 2, 4, 5, 6, 7 und 8 Sekunden zur Visualisierung des Strömungsverhaltens.

nicht nur die Maximalwerte, sondern auch die jeweilige gesamte Berechnung mit einer ausreichend genauen Übereinstimmung vorliegt und die Verifizierung

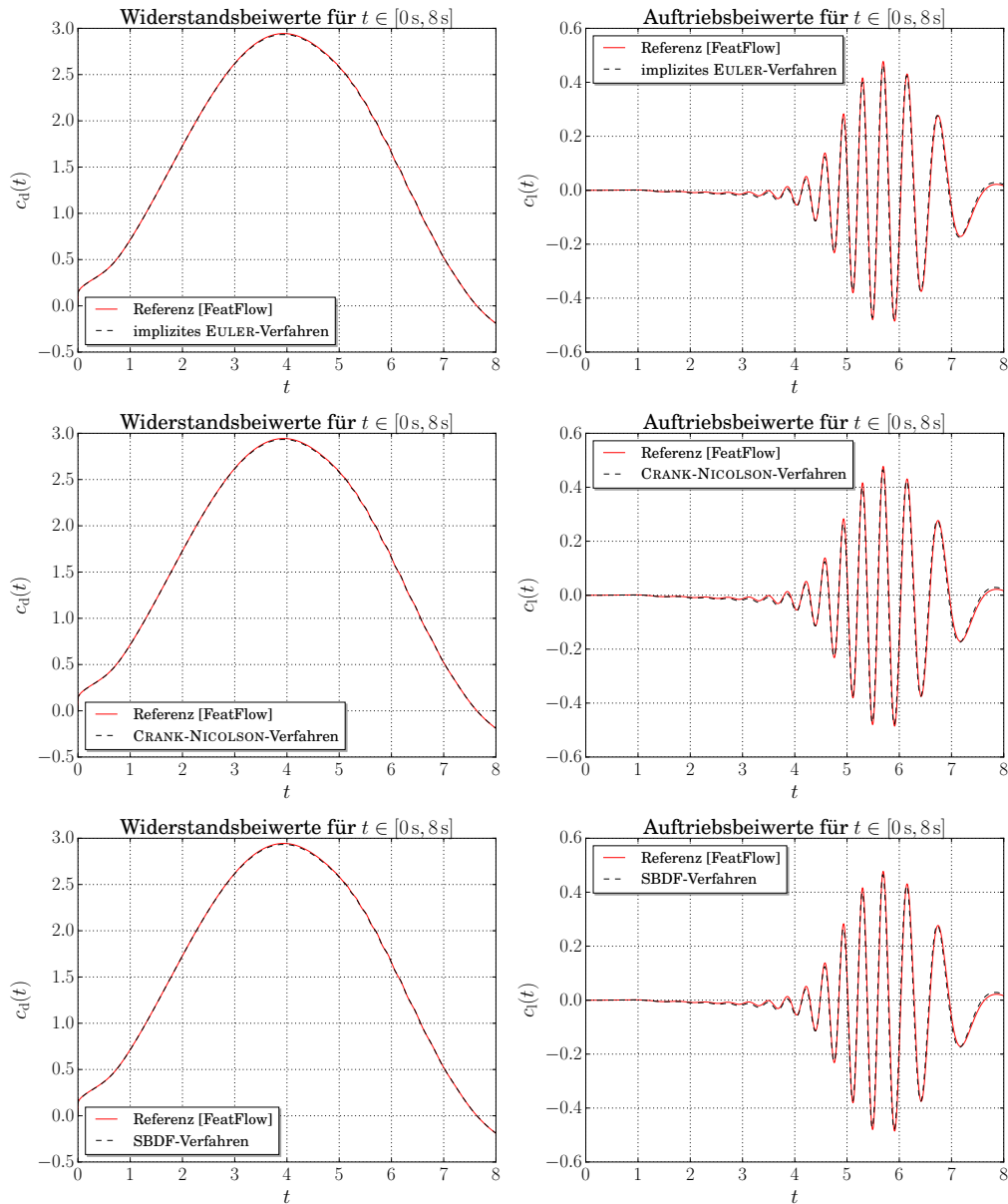


Abb. 5.9.: Vergleich der Widerstands- und Auftriebsbeiwerte.

der Lösung dadurch erfolgreich abgeschlossen ist. Des Weiteren ist zu erkennen, dass das implizite EULER-Verfahren, ein Verfahren erster Ordnung, keine signifikant größere Abweichung zu den Verfahren zweiter Ordnung, dem impliziten CRANK-NICOLSON-Verfahren und dem SBDF-Verfahren, hat. Auch die zeitliche Diskretisierung mit dem SBDF-Verfahren erweist sich als erfolgreich implementiert und akkurat und kann somit für die Berechnung von Konvek-

tionsströmungen in Betracht gezogen werden. Allerdings ist eine Abweichung vorhanden, die nicht ignoriert werden darf und insbesondere in den drei Berechnungen der Auftriebsbeiwerte $c_1(t)$ im Zeitraum $t \in [7\text{s}, 8\text{s}]$ zu sehen ist. Verantwortlich dafür wird vermutlich die deutlich geringe Anzahl der Elementen sein und die halb so große Zeitschrittweite Δt .

5.3. Instationäre temperaturinduzierte Nischenströmung

Im Folgenden wird das Testproblem für die Verifizierung der Lösung eines gekoppelten Problems vorgestellt, sodass festgestellt werden kann, dass die Formulierungen zur Berechnung von Konvektionsströmungen korrekt implementiert sind. Das Testproblem, auf das in dieser Arbeit Bezug genommen wird, wurde im Rahmen der Konferenz »*First MIT Meeting on Computational Fluid and Solid Mechanics*« vorgestellt, siehe [Christon u. a. 2002].

Es handelt sich dabei um die Berechnung von natürlicher Konvektion am Beispiel der temperaturinduzierten Nischenströmung unter klar definierten Voraussetzungen. Die Lösungen die diesbezüglich eingereicht und verglichen wurden, ermöglichten die Hervorhebung der Methoden, die für die Berechnung von instationären Konvektionsströmungen geeignet sind. Zur Verifizierung werden jedoch nur die Referenzwerte von den Partizipanten Xin und Le Quéré herangezogen, siehe [Xin u. Le Quéré 2002]. Alternative Benchmarks bezüglich der temperaturinduzierten Nischenströmung sind in [De Vahl Davis u. Jones 1983], [Markatos u. Pericleous 1984], [Le Quéré 1991] und [Mayne u. a. 2000] zu finden.

5.3.1. Problembeschreibung

Eine Skizze zur Veranschaulichung des Problems ist in [Abbildung 5.10](#) gegeben. Das Rechengebiet $\Omega \in [0, B] \times [0, H]$ ist rechteckig, wobei die Breite B und Höhe H der Geometrie im Verhältnis $\mathcal{V} = H/B = 8$ zueinander stehen. Die Gravitationsbeschleunigung sei konstant und zeige in negative y -Richtung. Da das Problem in [Christon u. a. 2002] dimensionslos formuliert ist und im Folgenden nur dimensionslose Ergebnisse vorgestellt werden, sind die wenigen, hier vorkommenden dimensionsbehafteten Größen mit einer Tilde akzentuiert. Gleichzeitig werden die dimensionslosen Größen nicht mehr mit einem Zirkumflex erkennbar gemacht.

Die entdimensionierten Gleichungen zur Berechnung des Problems unterscheiden sich von den in [Abschnitt 3.3](#) vorgestellten Gleichungen, wie zuvor begründet. Unter der Annahme, dass die BOUSSINESQ-Approximation für das gegebene Problem gültig ist, werden die NAVIER-STOKES-Gleichung, die Inkompressibilitätsbedingung und die Feldgleichung für die Temperatur mit folgenden, entdimensionierten Formulierungen benötigt, siehe [Christon u. a. 2002], S. 987:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (5.20)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \nabla p - \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \nabla^2 \mathbf{v} + T \mathbf{g} = \mathbf{0}, \quad (5.21)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T - \frac{1}{\sqrt{RaPr}} \nabla^2 T = 0, \quad (5.22)$$

mit $\mathbf{g} = -\mathbf{e}_y$. Für die dimensionslose PRANDTL-Zahl gilt die Beziehung $Pr := \nu/a$. Sie stellt das Verhältnis zwischen kinematischer Viskosität ν und der Temperaturleitfähigkeit $a = \frac{\kappa}{\rho_0 c_p}$ dar, vgl. etwa [Prandtl u. a. 1990], S. 295. Im Gegensatz zu den bisher eingeführten Kennzahlen ist sie eine reine Stoffgröße. Die RAYLEIGH-Zahl ist weiterhin durch die in Gleichung (3.34) vorgestellte Beziehung definiert:

$$Ra := \frac{\alpha g_{\text{ref.}} c_p \rho_0}{\nu \kappa} \Delta \tilde{T} l_{\text{ref.}}^3. \quad (5.23)$$

Zudem sind die verwendeten Substitutionen der Entdimensionierung dieselben, die in den Gleichungen (3.31)₁ - (3.31)₆ vorgestellt wurden, wobei folgende Änderung an der dimensionsbehafteten Temperatur \tilde{T} vorgenommen wird:

$$\tilde{T} - \tilde{T}_r = T_{\text{ref.}} T \quad (5.24)$$

mit

$$\tilde{T}_r = \frac{\tilde{T}_h + \tilde{T}_k}{2}. \quad (5.25)$$

Wie zu erkennen ist, wird die dimensionsbehaftete Temperatur um den Mittelwert \tilde{T}_r , welcher sich aus den Randbedingungen bildet, verschoben. Des Weiteren werden die dimensionsbehafteten Größen mit den folgenden charakteristischen Größen entdimen-

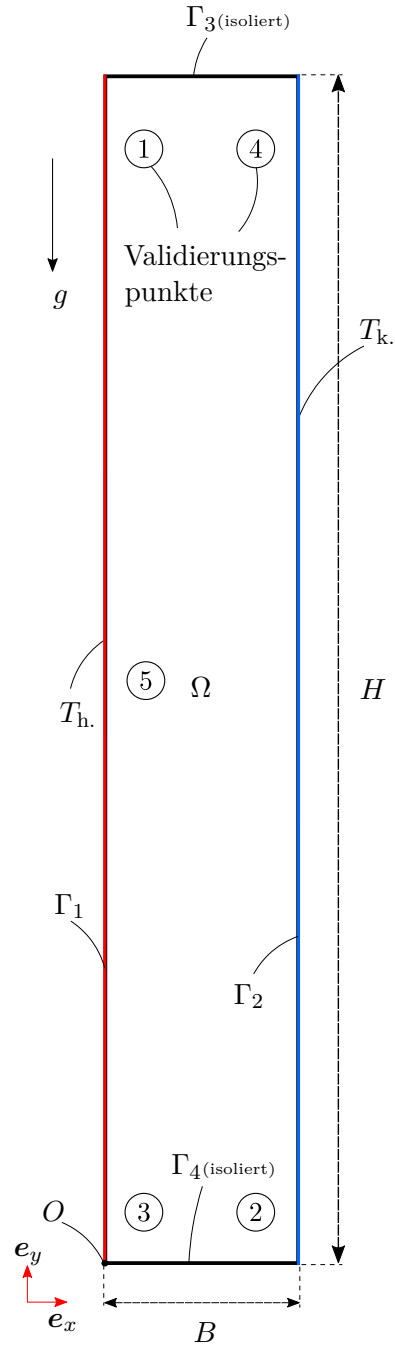


Abb. 5.10.: Graphische Darstellung der temperaturinduzierten Nischenströmung. Das Symbol O kennzeichnet den Ursprung des Koordinatensystems.

sioniert:

$$l_{\text{ref.}} = B, \quad v_{\text{ref.}} = \sqrt{g_{\text{ref.}} \alpha B \Delta \tilde{T}}, \quad T_{\text{ref.}} = \tilde{T}_{\text{h.}} - \tilde{T}_{\text{k.}}.$$

Die Breite des Rechtecks dient als charakteristische Länge und die Geschwindigkeit wird anhand des Auftriebs charakterisiert. Zusätzlich wird die charakteristische Temperatur der Strömung auf die Temperaturdifferenz $\Delta \tilde{T}$ der beiden vertikalen Wände festgelegt. Die Skalierung der Zeit und des Drucks erfolgt wieder jeweils mit $t_{\text{ref.}} = l_{\text{ref.}}/v_{\text{ref.}}$ und $p_{\text{ref.}} = \rho_0 v_{\text{ref.}}^2$.

In [Christon u. a. 2002] wird gefordert, dass die Berechnung mit einer PRANDTL-Zahl von $Pr = 0,71$, was näherungsweise dem Wert für Luft bei Temperaturen oberhalb von -50°C entspricht, siehe [Prandtl u. a. 1990], S. 297, und einer RAYLEIGH-Zahl von $Ra = 3,4 \times 10^5$ durchzuführen ist. Die Festlegung dieser Werte ist darauf zurückzuführen, dass sie den Übergang von stationärem zu instationärem Verhalten der Strömung charakterisieren, vgl. etwa [Christon u. a. 2002], S. 975 ff. Zudem wird auf allen Wänden die Haftbedingung als DIRICHLET-Bedingung mit $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)|_{\Gamma} = \mathbf{0}$ vorgegeben. Die Berechnung findet also in einem geschlossenen Bereich statt. Für die Temperaturen auf den vertikalen Wänden gelten die DIRICHLET-Bedingungen

$$T(\mathbf{x}, t)|_{\Gamma_1} = T_{\text{h.}} = +\frac{1}{2}, \quad T(\mathbf{x}, t)|_{\Gamma_2} = T_{\text{k.}} = -\frac{1}{2}, \quad (5.26)$$

während die horizontalen Wände isoliert sind, also die NEUMANN-Bedingungen

$$\frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial y} \Big|_{\Gamma_3} = 0, \quad \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial y} \Big|_{\Gamma_4} = 0 \quad (5.27)$$

gefordert sind. Aufgrund der Wärmeübertragung zwischen der Wand und dem Fluid steigt beziehungsweise sinkt das Fluid an den jeweiligen Stellen, was dem Charakter der natürlichen Konvektion entspricht. Das Fluid soll zum Simulationsstart $t = 0$ isotherm und in Ruhe sein. Die Anfangsbedingungen lauten wie folgt:

$$T(\mathbf{x}, 0)|_{\Omega} = 0, \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}, 0)|_{\Omega} = \mathbf{0}. \quad (5.28)$$

Die Simulation wird für die Zeitspanne $t \in [0, 350]$ durchgeführt. Außerdem ist in [Abbildung 5.11](#) eine vergrößerte Ansicht der Elemente des Netzes zu sehen. Die acht Elemente, die dargestellt werden, sind diejenigen, die dem Ursprung des Koordinatensystem am nächsten sind. Die Anordnung der Elemente bleibt in der gesamten Vernetzung der Geometrie erhalten, sodass sich 25 Elemente auf der x -Achse und 100 Elemente auf der y -Achse befinden. [Tabelle 5.4](#) zeigt die Konfiguration der Vernetzung für das vorliegende Problem. Das strukturierte Netz besteht aus 5000 Dreieckselementen mit insgesamt 25 754 Freiheitsgraden.

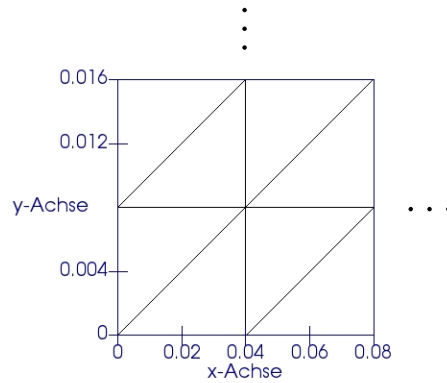


Abb. 5.11.: Vergrößerte Darstellung der finiten Elemente mit entsprechender Kantenlänge für die Berechnung der temperaturinduzierten Nischenströmung.

Freiheitsgrade				Elemente
Geschwindigkeit	Druck	Temperatur	Gesamt	
20 502	2626	2626	25 754	5000

Tab. 5.4.: Konfiguration der Freiheitsgrade für die temperaturinduzierte Nischenströmung.

5.3.2. Validierungsgrößen

Im Folgenden werden die Größen vorgestellt, die in der Validerung mit den Referenzwerten verglichen oder zusätzlich präsentiert werden.

Berechnung des zeitlichen Mittelwerts Für eine allgemeine Variable ξ , z. B. $\xi = v_x, v_y, T, \dots$, sei der Mittelwert wie folgt definiert:

$$\bar{\xi} = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} \xi(\mathbf{x}, t) dt, \quad (5.29)$$

wobei τ die Zeitspanne beschreibt, die für die Berechnung des Mittelwerts betrachtet werden soll. Die Bestimmung der Zeitspanne τ erfolgt anhand der zeitlichen Periode, nach der die Variable ξ den gleichen Wert wie zu Anfang der Periode aufweist. Zusätzlich wird die oszillierende Komponente wie folgt berechnet:

$$\xi'(\mathbf{x}, t) = \xi(\mathbf{x}, t) - \bar{\xi}. \quad (5.30)$$

Punktuelle Betrachtung Die Berechnungen der Mittelwerte und der oszillierenden Komponenten werden für die Größen v_x, v_y, T und die Wirbelstärke ω am Validierungspunkt eins vorgenommen, siehe [Abbildung 5.10](#). Die Notation sieht vor, dass die Größen des jeweiligen Validierungspunktes mit der entsprechenden Zahl als Subskript gekennzeichnet werden. Die Temperatur am Validierungspunkt

Punkt	x -Koordinate	y -Koordinate
1	0,1810	7,3700
2	0,8190	0,6300
3	0,1810	0,6300
4	0,8190	7,3700
5	0,1810	4,0000

Tab. 5.5.: Dimensionslose Koordinaten der Validierungspunkte.

eins entspricht demzufolge dem Symbol T_1 . Die Koordinaten der Punkte können der [Tabelle 5.5](#) entnommen werden. Hinzukommend ist die Wirbelstärke ω für das vorliegende Problem wie folgt definiert:

$$\omega = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} . \tag{5.31}$$

Betrachtung der Asymmetrie Darüber hinaus ist die Betrachtung der Asymmetrie Gegenstand der Verifizierung. Die Beziehung für ε_{12} sei wie folgt definiert:

$$\varepsilon_{12} = T_1 + T_2 . \tag{5.32}$$

Bei asymmetrischem Verhalten der Strömung gilt $\varepsilon_{12} \approx 0$ (maschinell), wegen der asymmetrischen Beziehung $T_1 \approx -T_2$. Außerdem wird die Druckdifferenz Δp_{14} berechnet, die wie folgt gebildet wird:

$$\Delta p_{ij} = p_i - p_j . \tag{5.33}$$

Auch in der obigen Gleichung beziehen sich die Subskripte auf die Validierungspunkte, an denen die Größen ausgewertet werden.

Berechnung der Nusselt-Zahl Eine weitere dimensionslose Zahl, die untersucht wird, ist die sogenannte NUSSELT-Zahl, Nu . Sie ist eine dimensionslose Kennzahl, die das Verhältnis zwischen tatsächlichem Wärmeübergang und dem Wärmeübergang, der unter sonst gleichen Bedingungen für ein ruhendes Fluid vorliegen würde, beschreibt, siehe [Prandtl u. a. 1990], S 295. Der Übergang findet dabei

zwischen einer festen Oberfläche und einem Fluid statt. Zusammengefasst lautet die Gleichung zur Bestimmung der NUSSELT-Zahl wie folgt, siehe [Christon u. a. 2002], S. 960:

$$Nu = \frac{1}{H} \int_0^H \left| \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{\Gamma_1} dy . \quad (5.34)$$

Es wird die NUSSELT-Zahl der linken, vertikalen Wand berechnet und mit der Referenz verglichen. Auf einen Vergleich der NUSSELT-Zahl der rechten, vertikalen Wand wird verzichtet, da die Werte für die beiden Ränder kaum voneinander abweichen.

Globale Größen Die globale Betrachtung der Lösung erfolgt über die quadratischen Mittelwerte (engl. *root mean square*) der Geschwindigkeit und der Wirbelstärke, die wie folgt definiert sind:

$$v_{\text{rms.}}(t) = \sqrt{\frac{1}{2A} \int_A \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dA} , \quad \omega_{\text{rms.}}(t) = \sqrt{\frac{1}{2A} \int_A \omega^2 dA} , \quad (5.35)$$

wobei dA das Flächenelement und A die Fläche darstellen. Die beiden Beziehungen geben Auskunft über den durchschnittlichen Wert der Geschwindigkeit und der Wirbelstärke.

5.3.3. Schwache und zeitdiskrete Formulierung

Zunächst wird das Differentialgleichungssystem in den [Gleichungen \(5.20\) - \(5.22\)](#) in schwache Formulierungen überführt und anschließend mit dem SBDF-Verfahren in der Zeit diskretisiert. Seien \mathbf{v} , p und T die Ansatzfunktionen und \mathbf{w} , q und U die jeweiligen Testfunktionen. Mit der Annahme der Isolation der Wände lauten die Formulierungen wie folgt:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}, \mathbf{w} \right)_{\Omega} + \mathcal{C}(\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) - \mathcal{B}(\mathbf{w}, p) + \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \mathcal{A}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + (T \mathbf{g}, \mathbf{w})_{\Omega} = 0 , \quad (5.36)$$

$$B(\mathbf{v}, q) = 0 , \quad (5.37)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}, U \right)_{\Omega} + (\mathbf{v} \cdot \nabla T, U)_{\Omega} + \frac{1}{\sqrt{RaPr}} (\nabla T, \nabla U)_{\Omega} = 0 . \quad (5.38)$$

Die zeitliche Diskretisierung wurde bereits in den [Gleichungen \(4.30\)](#) und [\(4.34\)](#) motiviert und ist nahezu identisch auf das vorliegende Differentialgleichungssystem anzuwenden, wobei die konvektiven Änderungen und der Auftriebsterm rein explizit berechnet werden und nicht semi-implizit, vgl. etwa [Xin u. Le Quéré

2002], S. 988:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[3(\mathbf{v}^{n+1}, \mathbf{w})_{\Omega} - 4(\mathbf{v}^n, \mathbf{w})_{\Omega} + (\mathbf{v}^{n-1}, \mathbf{w})_{\Omega} \right] + 2\Delta t \mathcal{C}(\mathbf{v}^n, \mathbf{v}^n, \mathbf{w}) + \\ & - \Delta t \mathcal{C}(\mathbf{v}^{n-1}, \mathbf{v}^{n-1}, \mathbf{w}) + \Delta t \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \mathcal{A}(\mathbf{v}^{n+1}, \mathbf{w}) + 2\Delta t (T^n \mathbf{g}, \mathbf{w})_{\Omega} + \\ & - \Delta t (T^{n-1} \mathbf{g}, \mathbf{w})_{\Omega} - \Delta t \mathcal{B}(\mathbf{w}, p^{n+1}) - \Delta t \mathcal{B}(\mathbf{v}^{n+1}, q) = 0, \quad (5.39) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[3(T^{n+1}, U)_{\Omega} - 4(T^n, U)_{\Omega} + (T^{n-1}, U)_{\Omega} \right] + 2\Delta t (U \mathbf{v}^n, \nabla T^n)_{\Omega} - \\ & - \Delta t (U \mathbf{v}^{n-1}, \nabla T^{n-1})_{\Omega} + \Delta t \frac{1}{\sqrt{RaPr}} (\nabla T^{n+1}, \nabla U)_{\Omega} = 0. \quad (5.40) \end{aligned}$$

Der Beweggrund, die konvektiven Terme und den Auftriebsterm rein explizit und nicht semi-implizit zu berechnen, stützt sich auf die im Zuge der Bearbeitung gewonnene Erkenntnis, dass eine höhere Stabilität in der numerischen Berechnung des gegebenen Problems erreicht werden kann.

5.3.4. Ergebnisse und Diskussion

In diesem Unterabschnitt werden die Ergebnisse präsentiert und die oben genannten Validierungsgrößen mit der Referenz verglichen. Die Lösung des Problems ist instationär und periodisch. Die graphische Darstellung des Temperatur- und Geschwindigkeitsfeldes im eingeschwungenen Zustand der Strömung zum dimensionslosen Zeitpunkt $t = 350$ ist in [Abbildung 5.12](#) gegeben. Die Simulation ist mit einem dimensionslosen Zeitschritt von $\Delta t = 10^{-3}$ berechnet worden. Außerdem sind die Isothermen in der [Abbildung 5.12a](#) abgebildet, die auf ein asymmetrisches Verhalten der Strömung vermuten lassen. Auch das Geschwindigkeitsfeld in [Abbildung 5.12b](#) deutet auf die Asymmetrie hin. Besonders ersichtlich wird dies, wenn in den Abbildungen die Validierungspunkte eins und zwei miteinander verglichen werden.

Die Verifizierung der Ergebnisse erfolgt über den Vergleich mit den Referenzwerten von Xin und Le Quéré in [Tabelle 5.6](#) und [Tabelle 5.7](#), siehe [Xin u. Le Quéré 2002]. In der Veröffentlichung heißt es, dass die CHEBYSHEV pseudo-spektral Methode, die von den genannten Autoren verwendet wird, eine besonders hohe Konvergenzrate besitzt, wobei diese nur von der Regularität der Lösung abhängt. Die Autoren wurden gebeten, eine Lösung einzureichen, die den Kriterien eines Benchmarks entsprechen, um einen Vergleich aller eingereichten Ergebnisse zu ermöglichen, siehe [Christon u. a. 2002], S. 966. Aus diesen Gründen orientieren wir uns an den genannten Ergebnissen.

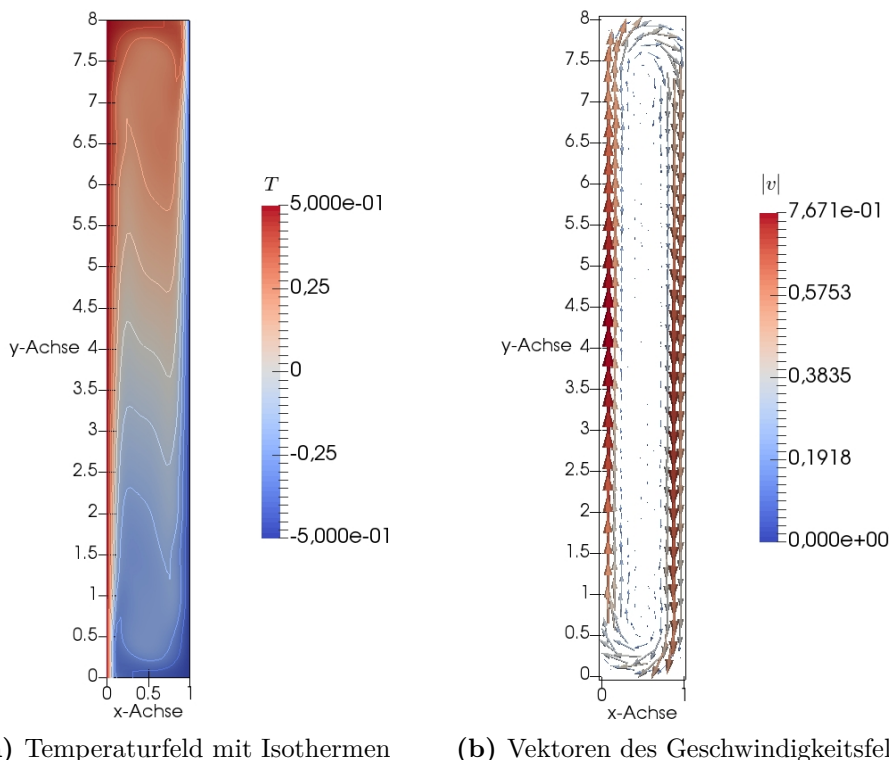


Abb. 5.12.: Graphische Darstellung des Temperatur- und Geschwindigkeitsfeldes der temperaturinduzierten Nischenströmung zum Zeitpunkt $t = 350$. Zusätzlich sind in **(a)** die Isothermen im Temperaturfeld abgebildet und in **(b)** der Betrag des jeweiligen Geschwindigkeitsvektors farblich hervorgehoben.

	Validierungspunkt 1			τ von T_1	
	$\bar{v}_{x,1}$	$v'_{x,1}$	\bar{T}_1	T'_1	τ_T
Eigene Berechnung	0,060 36	0,046 82	0,268 76	0,030 94	3,390 00
Xin u. Le Quéré	0,056 36	0,054 83	0,265 48	0,042 74	3,411 50
Relative Abweichung in %	7,097 23	-14,608 79	1,235 50	-27,608 80	-0,630 22

Tab. 5.6.: Vergleich der Ergebnisse mit den Referenzwerten bzgl. des Validierungspunktes 1.

In [Tabelle 5.6](#) ist zu erkennen, dass die relativen Abweichungen der einzelnen Größen stark variieren. Einerseits weisen die Werte für \bar{T}_1 und τ_T eine Abweichung von unter zwei Prozent auf. Andererseits weicht die durchschnittliche Geschwindigkeit $\bar{v}_{x,1}$ am Validierungspunkt eins bereits um rund 7,10% ab. Auch für die oszillierende Komponente T'_1 der Temperatur liegt die Abweichung bei -27,61%. Noch deutlicher werden die stark variierenden Abweichungen der Er-

	\overline{Nu}	Nu'	$\overline{\Delta p_{14}}$	$\Delta p'_{14}$
Eigene Berechnung	4,463 10	0,004 75	-0,001 32	0,012 52
Xin u. Le Quéré	4,579 46	0,007 10	0,001 85	0,020 38
Relative Abweichung in %	-2,540 91	-33,098 59	-171,351 35	-38,567 22

Tab. 5.7.: Vergleich von \overline{Nu} , Nu' , Δp_{14} und $\Delta p'_{14}$ mit den Referenzwerten.

gebnisse in [Tabelle 5.7](#). Die Größe \overline{Nu} liegt mit einer relativen Abweichung von $-2,54\%$ nah an der Referenz, wohingegen die restlichen Größen mit einer Abweichung von teilweise weit über $\pm 10\%$ behaftet sind. Besonders auffällig ist die durchschnittliche Druckdifferenz $\overline{\Delta p_{14}}$, die um rund $-171,35\%$ von der Referenz abweicht. Fehler dieser Größenordnung verdeutlichen, dass die Berechnungen mit der vorgestellten Konfiguration nicht mit hohen Genauigkeiten durchführbar sind. Grund für die starke Abweichung ist vermutlich die weitaus geringere Anzahl an Elementen. Die Feinheit der räumlichen Diskretisierung liegt aufgrund der geringen, zur Verfügung stehenden Rechenleistung unterhalb der Empfehlung der Autoren Christon u. a. Außerdem kann die Abweichung der Lösung auch von den angewandten numerischen Methoden abhängen. Der Vergleich von $\overline{\Delta p_{14}}$ aller Partizipierenden stützt letztere Annahme. Die durchschnittliche Abweichung des Mittelwerts $\overline{\Delta p_{14}}$ aller Partizipierenden in Bezug auf die Lösung von [Xin u. Le Quéré 2002] beträgt rund $16,8\%$, siehe [Christon u. a. 2002], S. 969.

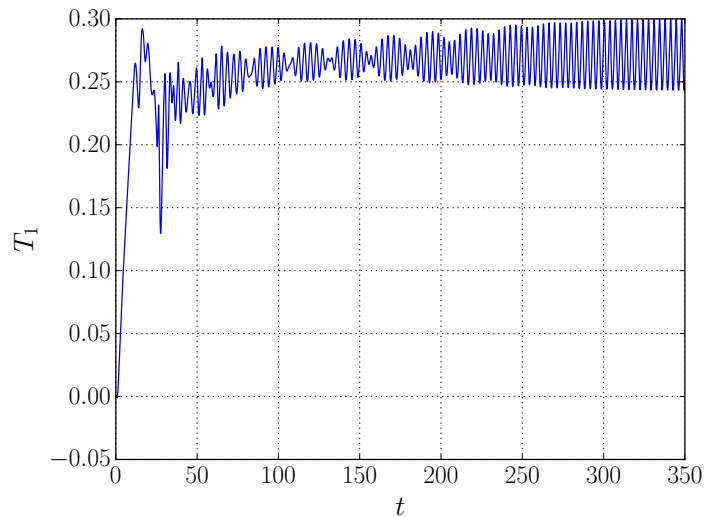


Abb. 5.13.: Verlauf der Temperatur T_1 am Validierungspunkt 1.

Des Weiteren zeigt die [Abbildung 5.13](#) den Verlauf der Temperatur am Validierungspunkt eins über die Zeit. Anhand der Abbildung wird der Einschwingvor-

gang und die anschließende Periodizität der Lösung erkenntlich. Die Periodendauer τ_T wird nach dem Einschwingen der Lösung ab $t > 330$ ausgewertet und beträgt 3,39 dimensionslose Zeiteinheiten. Außerdem kann die zuvor getroffene Vermutung der Asymmetrie des Problems anhand der [Abbildung 5.14](#) beurteilt werden. Der Funktionsverlauf von ε_{12} liegt innerhalb der Grenzen $\pm 4 \times 10^{-11}$

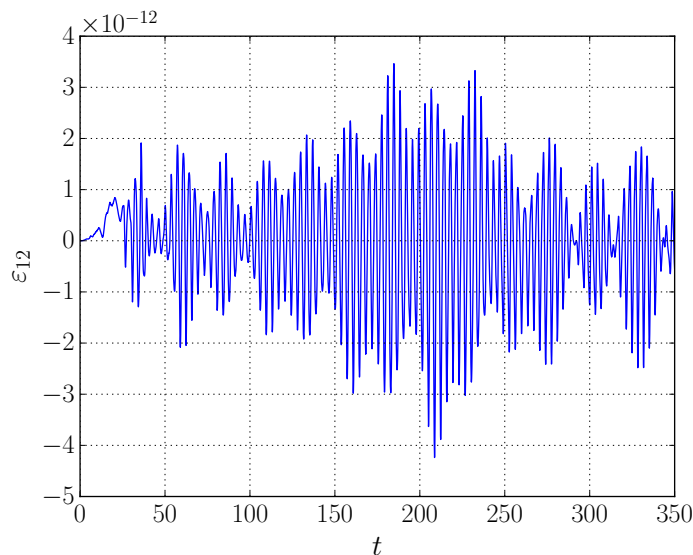


Abb. 5.14.: Verlauf von $\varepsilon_{12} = T_1 + T_2$ über den gesamten Zeitraum.

(maschinelle Null). Dadurch kann die Lösung als asymmetrisch interpretiert werden. Als Abschluss der Verifizierung werden die globalen Größen $\bar{\omega}_{\text{rms.}}$ und $\omega'_{\text{rms.}}$ in der [Tabelle 5.8](#) präsentiert und verglichen. Der Vergleich findet jedoch nicht wie zuvor mit der Referenz [Xin u. Le Quéré 2002] statt, da in der Veröffentlichung keine Angaben zu diesen Größen vorhanden sind, sondern mit dem durchschnittlichen Wert aller diesbezüglich vorhandenen Lösungen, siehe [Christon u. a. 2002], S. 966. Auf einen Vergleich der globalen Größen $\bar{v}_{\text{rms.}}$ und $v'_{\text{rms.}}$ muss im Folgenden leider verzichtet werden, da keine klare Periodizität festgestellt werden kann und somit die Berechnung des Mittelwerts nicht möglich ist.

	$\bar{\omega}_{\text{rms.}}$	$\omega'_{\text{rms.}}$
Eigene Berechnung	3,0352	0,000 81
Mittelwert der Partizipierenden	2,9998	0,003 49
Relative Abweichung in %	1,1800	-76,790 83

Tab. 5.8.: Vergleich von $\bar{\omega}_{\text{rms.}}$ und $\omega'_{\text{rms.}}$ mit der Referenz.

Der Mittelwert $\bar{\omega}_{\text{rms}}$ weist eine relative Abweichung von unter zwei Prozent auf, wohingegen die oszillierende Komponente ω'_{rms} mit einer Abweichung von rund $-76,79\%$ vorliegt. Auch hier sind vermutlich die zuvor genannten Gründe für die starke Abweichung der oszillierenden Komponente verantwortlich. Es hat sich auch herausgestellt, dass eine Mittelung über mehrere Perioden die Abweichungen der oszillierenden Komponenten stark reduziert hat. Möglicherweise reicht die Anzahl der Perioden, die in die Berechnung eingeflossen sind, nicht aus, um ein genaues Ergebnis zu erhalten.

Nicht auszuschließen ist die Eventualität, dass der Einschwingvorgang der Lösung zum Zeitpunkt der Auswertung $t > 330$ nicht beendet ist. Die Auswertung der Ergebnisse in [Xin u. Le Quéré 2002] findet zu den Zeitpunkten $t = 1000$ und $t = 3900$ statt. Jedoch beschränkt der zeitliche Rahmen der Bachelorarbeit die Zeit, die für die Berechnungen der dargelegten Ergebnisse verwendet werden konnte. Für die dargelegten Ergebnisse wurden bereits zahlreiche Iterationen durchlaufen, sodass angenommen werden kann, dass Berechnungen bis $t = 1000$ mit den gegebenen Rechenkapazitäten mehrere Wochen in Anspruch nehmen könnten.

5.4. Konvektionsströmungen im äußeren Erdkern

Der letzte Abschnitt des Kapitels beschäftigt sich mit der Berechnung der Konvektionsströmungen im äußeren Erdkern und der Diskussion der diesbezüglich erzielten Ergebnisse. Beginnend mit dem Schichtenmodell der Erde wird das Problem auf den für die Berechnung relevanten Bereich reduziert und anschließend das Rand- und Anfangswertproblem beschrieben. Daraufhin werden die schwachen Formulierungen vorgestellt und schließlich die Ergebnisse der Simulationen bezüglich verschiedener RAYLEIGH-Zahlen diskutiert.

5.4.1. Problembeschreibung

Der innere Aufbau der Erde wird idealisiert als konzentrisches Kreisringmodell betrachtet, bestehend aus dem Erdmantel, dem äußeren Erdkern und dem inneren Erdkern. Die Geometrie des Problems ist in [Abbildung 5.15](#) dargestellt. Wie bereits zuvor erwähnt, ist der für die Berechnung relevante Bereich $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : r_{\text{in.}}^2 \leq x^2 + y^2 \leq r_{\text{au.}}^2\}$ der primär aus Eisen bestehende äußere Erdkern. Im Gegensatz zu dem festen, ebenfalls aus Eisen bestehenden inneren Kern, ist der äußere Erdkern flüssig, siehe [Anderson 1989] S. 67. Die Grenzen des Kreisrings sind durch die Radien $r_{\text{in.}} = 0,5$ und $r_{\text{au.}} = 1$ beschrieben. Außerdem wird die Bewegung des Fluids in erster Linie durch die am Übergang zum inneren Erdkern vorhandene Temperaturdifferenz induziert. Dies hat zur Folge, dass das zuvor vorgestellte Phänomen der natürlichen Konvektion eintritt. Dabei zeigt

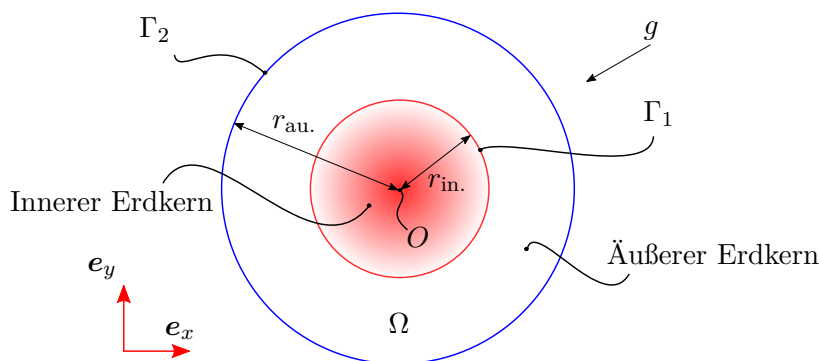


Abb. 5.15.: Skizze der zweidimensionalen Geometrie des äußeren Erdkerns. Der Ursprung O ist im Zentrum des Erdkerns.

die Gravitationsbeschleunigung in Richtung des Zentrums $\forall \mathbf{x} \in \Omega$. Zusätzlich sind folgende DIRICHLET-Bedingungen an den Rändern Γ_1 und Γ_2 vorgegeben:

$$T(\mathbf{x}, t)|_{\Gamma_1} = 0,5, \quad T(\mathbf{x}, t)|_{\Gamma_2} = -0,5, \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} = \mathbf{0}. \quad (5.41)$$

Das Fluid sei zum Anfangszeitpunkt $t = 0$ in Ruhe und isotherm mit folgenden Bedingungen:

$$T(\mathbf{x}, t)|_{t=0} = 0, \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)|_{t=0} = \mathbf{0}. \quad (5.42)$$

Das für die Berechnung verwendete Netz ist unstrukturiert und besteht aus 7371 Dreieckselementen mit 30 338 Freiheitsgraden für die Geschwindigkeit, 3899 Freiheitsgraden für den Druck und für die Temperatur, siehe [Tabelle 5.9](#).

Freiheitsgrade		Elemente		
Geschwindigkeit	Druck	Temperatur	Gesamt	
30 338	3899	3899	38 136	7371

Tab. 5.9.: Konfiguration der Freiheitsgrade für das Problem der Konvektionsströmungen im äußeren Erdkern.

Zudem ist in der [Tabelle 5.10](#) eine Zusammenfassung einiger Materialeigenschaften des äußeren Erdkerns gegeben, die größtenteils aus experimentellen Versuchen erhalten wurden, vgl. etwa [Anderson 1989], S. 68. Die Simulation wird jedoch nicht vollständig mit den Materialparametern des äußeren Erdkerns berechnet, da dies ein zu umfangreiches Problem darstellt. Wie in der Tabelle zu erkennen ist, liegt die REYNOLDS-Zahl für Simulationen innerhalb des äußeren Erdkerns üblicherweise bei $Re = 3 \times 10^8$. Zudem zeigt eine überschlägige Berechnung der RAYLEIGH-Zahl mit den [Tabelle 5.10](#) gegebenen Werten, dass die dimensionslose

Symbol	Eigenschaft	Äußerer Erdkern
d	Schichtdicke (km)	2259
p	Druck (Mbar)	1,36
ρ	Dichte (g/cm ³)	9,9 – 12,17
c_p	spezifische Wärmekapazität (cm ² /K s ²)	5×10^6
α	Wärmeausdehnungskoeffizient (K ⁻¹)	10×10^{-5}
κ	thermische Leitfähigkeit (cm g/K s ³)	4×10^6
ν	kinematische Viskosität (cm ² /s)	8×10^{-3}
Re	REYNOLDS-Zahl	3×10^8
Ra	RAYLEIGH-Zahl	$6,925 \times 10^{22}$

Tab. 5.10.: Materialeigenschaften des äußeren Erdkerns, vgl. etwa [Anderson 1989], S. 68.

Kennzahl in der Größenordnung 10^{22} liegt. Die charakteristischen Größen sind für die überschlägige Berechnung der RAYLEIGH-Zahl wie folgt festgelegt:

$$T_{\text{ref.}} = \Delta T = 2000 \text{ K} , \quad g_{\text{ref.}} = 9,81 \text{ m/s}^2 , \quad l_{\text{ref.}} = 2259 \text{ km} . \quad (5.43)$$

Die Temperaturdifferenz zwischen den beiden Rändern des Systems wird auf 2000 K geschätzt, vgl. etwa [de Wijs u. a. 1998]. Gleichzeitig dient die Gravitationsbeschleunigung, die ein Masseteilchen auf der Erdoberfläche erfährt, als charakteristische Größe. Zuletzt bezieht sich die charakteristische Länge auf die Schichtdicke d des äußeren Kerns.

Eine Konvergenz der Berechnung mit der in [Tabelle 5.10](#) vorgestellten Konfiguration und den in dieser Arbeit vorgestellten Methoden ist nicht möglich, zumal die Strömung als turbulent angenommen wird und die zur Verfügung stehende Rechenleistung nicht ausreicht, um plausible Ergebnisse zu erzielen. Aus diesem Grund wird das Problem der temperaturinduzierten Nischenströmung in [Abschnitt 5.3](#) auf den in [Abbildung 5.15](#) dargestellten zweidimensionalen Kreisring erweitert und das modifizierte Problem gelöst. Das Differentialgleichungssystem für die Berechnung der Konvektionsströmungen im äußeren Erdkern wird durch die bereits eingeführten dimensionslosen [Gleichungen \(5.20\) - \(5.22\)](#) beschrieben, wobei der Einheitsvektor

$$\mathbf{g} = -\mathbf{e}_r = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{e}_x - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{e}_y \quad (5.44)$$

für alle Punkte des Gebiets in Richtung des Koordinatenursprungs zeigt. Die Substitutionen für die Entdimensionierung sind dieselben, die auch in [Unterab-](#)

schnitt 5.3.1 verwendet werden. Der Unterschied besteht darin, dass die dimensionslose PRANDTL- und RAYLEIGH-Zahl an das Problem angepasst werden. Die PRANDTL-Zahl ist, wie zuvor erwähnt, eine reine Stoffgröße und berechnet sich der Tabelle 5.10 entsprechend wie folgt:

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa} \rho_0 c_p = 0,1 . \quad (5.45)$$

Des Weiteren werden die Berechnungen mit den RAYLEIGH-Zahlen

$$Ra = 1 \times 10^i \quad \text{mit } i = 3, 4, 5, 6 \quad (5.46)$$

durchgeführt, um einen eventuellen Übergang von stationärem zu instationärem Verhalten der Strömung zu identifizieren. Dadurch distanziert sich das Modell jedoch stark von der physikalischen Struktur des äußeren Erdkerns. Die schwachen und zeitdiskreten Formulierungen wurden bereits in den Gleichungen (5.39) und (5.40) vorgestellt. Somit ist das SBDF-Verfahren das für die Zeitdiskretisierung verwendete Verfahren. Schließlich werden die Berechnungen für die dimensionslose Zeitspanne $t \in [0, 150]$ durchgeführt und diskutiert.

5.4.2. Ergebnisse und Diskussion

Die Betrachtung der Ergebnisse beginnt qualitativ mit den in Abbildung 5.16 dargestellten Temperaturfeldern zum dimensionslosen Zeitpunkt $t = 150$. Die vorliegende Stationarität der Lösung tritt allerdings bereits nach einem Bruchteil einer dimensionslosen Zeiteinheit ein. Die RAYLEIGH-Zahlen liegen für die

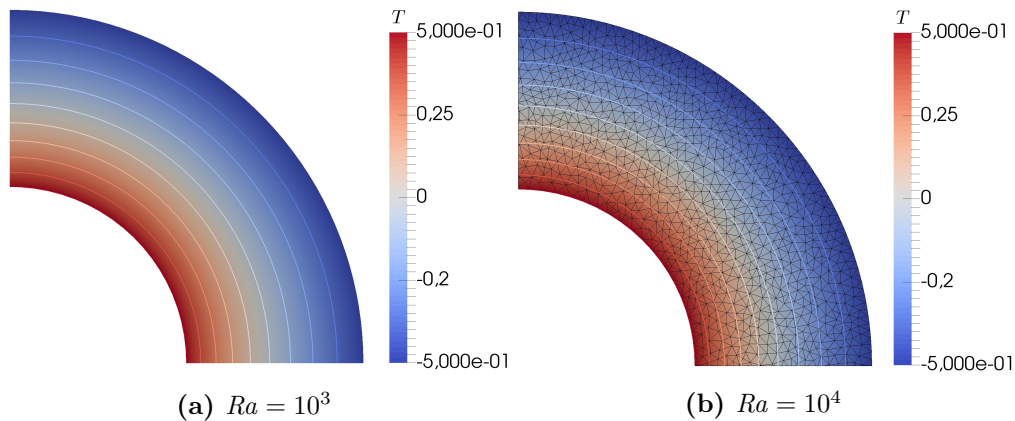


Abb. 5.16.: Graphische Darstellung der Temperaturfelder zum dimensionslosen Zeitpunkt $t = 150$. Zusätzlich sind die Isothermen und die Vernetzung der Geometrie abgebildet.

dargestellten Berechnungen bei 10^3 und 10^4 . Außerdem werden lediglich die

Temperaturfelder $\forall x, \forall y : x \geq 0, y \geq 0$ gezeigt, da die Temperaturfelder radial-symmetrisch sind. Hinzukommend ist in [Abbildung 5.16b](#) die unstrukturierte Vernetzung der Geometrie visualisiert. In den beiden Abbildungen ist zu erkennen, dass die Temperaturgradienten in Richtung des Koordinatenursprungs zeigen. Verdeutlicht wird dies anhand der Isothermen, die konzentrische Kreise um den inneren Erdkern bilden. Der Temperaturgradient steht dabei stets senkrecht auf den Isothermen, wobei die Abstände der Isothermen auf die Stärke des Temperaturgefälles hinweisen. Zugleich zeigt die konzentrische Anordnung der Isothermen, dass der Wärmetransport beider Berechnungen primär durch die Diffusion verursacht ist. Der Konvektionsstrom ist vernachlässigbar klein. Die Größenordnungen der dimensionslosen kinetischen Energien liegen für beide Berechnungen unter 10^{-9} . Jedoch lässt sich die dimensionslose Energie nicht in eine dimensionsbehaftete Größe übersetzen, da die Skalierung für die dargestellten Berechnungen nicht mit den charakteristischen Größen in den [Gleichungen \(5.43\)₁ - \(5.43\)₃](#) stattgefunden hat. Dementsprechend können die Ergebnisse lediglich qualitativ diskutiert werden.

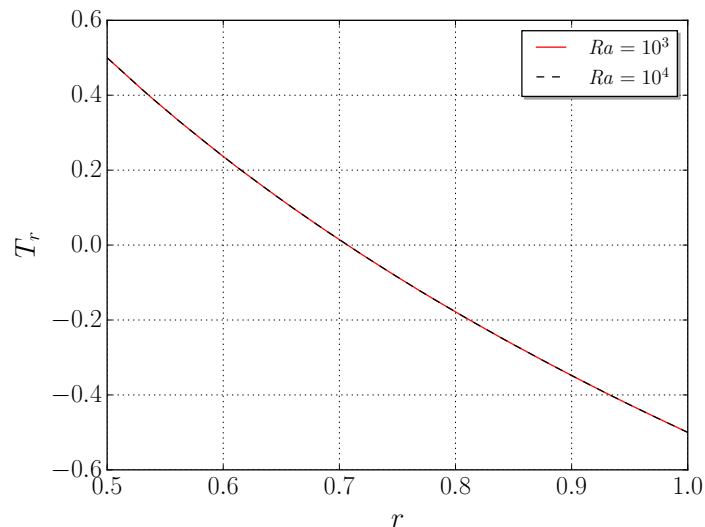


Abb. 5.17.: Verlauf der Temperaturen entlang des Radius im stationären Zustand.

In [Abbildung 5.17](#) ist der radiale Temperaturverlauf T_r beider Berechnungen gegeben. Festzustellen ist, dass die Verläufe identisch und nichtlinear sind. Der Grund für die identischen Verläufe ist wieder die Diffusion, die infolge der kaum vorhandenen Bewegung des Fluids überwiegt. Dies ändert sich, wenn der kritische Bereich der RAYLEIGH-Zahl für die gegebene Strömungssituation überschritten ist. [Abbildung 5.18](#) zeigt die Temperaturfelder mit den Isothermen der Berechnungen für $Ra = 10^5$ und $Ra = 10^6$ zu den jeweiligen, dimensionslosen Zeitpunkten $t = 20$ und $t = 12$. Es liegen instationäre Konvektionsströmungen vor, sodass der Zeitschritt auf $\Delta t = 10^{-3}$ gesetzt werden musste, um eine

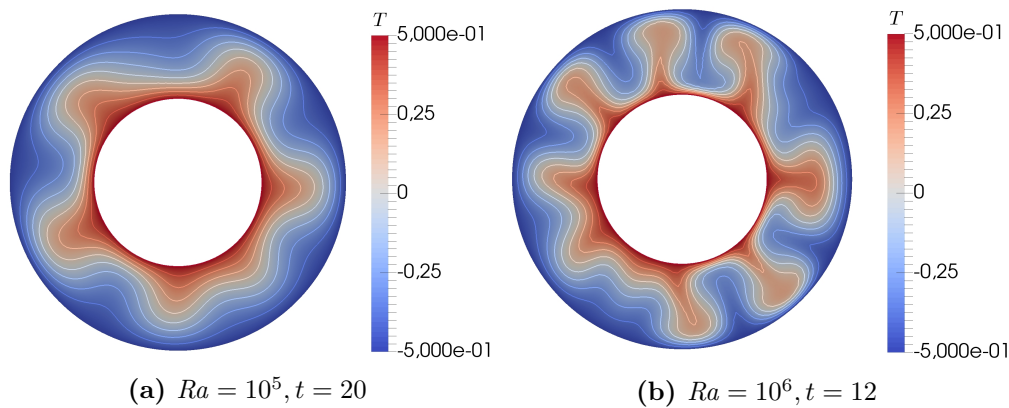


Abb. 5.18.: Graphische Darstellung der Temperaturfelder mit Isothermen zu den dimensionslosen Zeitpunkten $t = 20$ und $t = 12$. Die RAYLEIGH-Zahlen liegen jeweils bei 10^5 und 10^6 .

numerische Instabilität zu vermeiden. In beiden Temperaturfeldern sind die ersten aufsteigenden Blasen der Strömung zu sehen. Der Wärmetransport wird dabei primär von der natürlichen Konvektion verursacht. Dadurch ist in beiden Fällen die oben genannte, konzentrische Anordnung der Isothermen gebrochen. Gleichzeitig sinkt das Fluid zwischen den aufsteigenden Blasen aufgrund der negativen, dimensionslosen Temperatur am äußeren Rand. Ein qualitativer Vergleich beider Berechnungen zeigt, dass der Wärmetransport beziehungsweise die aufsteigende Materie in der Berechnung mit $Ra = 10^6$ zu einem früheren Zeitpunkt eine weitere Strecke in radialer Richtung hinterlegt hat.

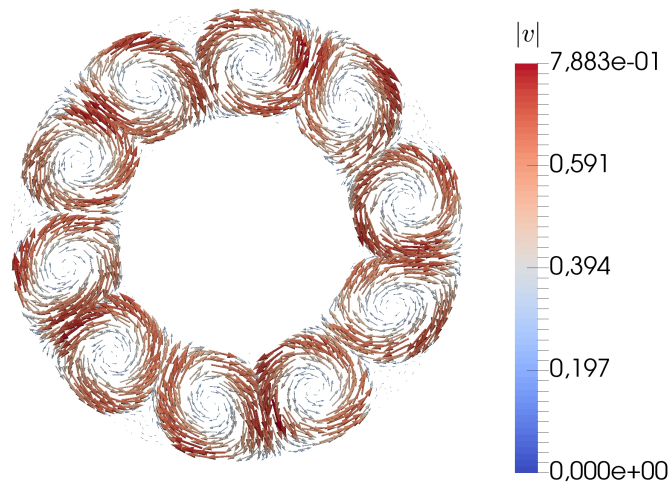


Abb. 5.19.: Graphische Darstellung des Geschwindigkeitsfeldes der Berechnung mit $Ra = 10^6$ zum dimensionslosen Zeitpunkt $t = 30$. Die Beträge der jeweiligen Geschwindigkeitsvektoren sind farblich visualisiert.

Die charakteristischen Konvektionszellen der Konvektionsströmungen sind in [Abbildung 5.19](#) visualisiert. Dargestellt ist das Geschwindigkeitsfeld für $Ra = 10^6$ zum dimensionslosen Zeitpunkt $t = 30$, wobei der Betrag des jeweiligen Geschwindigkeitsvektors farblich hervorgehoben ist. Die Drehrichtungen der Konvektionszellen sind dabei den Drehrichtungen der benachbarten Zellen entgegengesetzt. Hinzukommend ist in [Abbildung 5.20](#) festzustellen, dass die Lösung des Problems mit $Ra = 10^6$ ebenso wie die Lösung in [Abschnitt 5.3](#) eine Periodizität aufweist. Dargestellt in der Abbildung sind die Verläufe der Temperatur

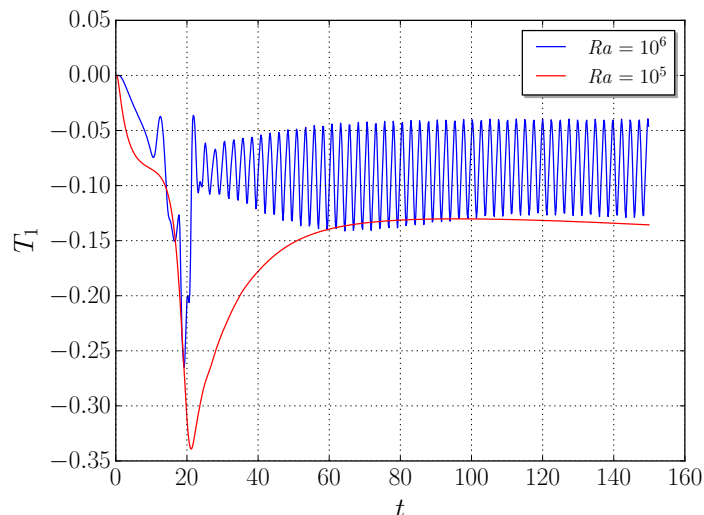


Abb. 5.20.: Zeitlicher Verlauf von T_1 für $Ra = 10^5$ und $Ra = 10^6$.

$T_1 = T(x = 0, y = 0,75, t)$ für $Ra = 10^5$ und $Ra = 10^6$ über die gesamte Zeitspanne $t \in [0, 150]$. Für $Ra = 10^6$ befindet sich T_1 im negativen Bereich und schwingt nach einem Einschwingvorgang periodisch. Bei der Berechnung mit $Ra = 10^5$ hingegen ist in der dargestellten Zeitspanne keine Periodizität zu erkennen.

Schließlich findet der Übergang von stationärem zu instationärem Verhalten im Bereich zwischen $Ra = 10^4$ und $Ra = 10^5$ statt. Zusätzlich liegt ein Wechsel zur Periodizität der Lösung zwischen $Ra = 10^5$ und $Ra = 10^6$ vor. Eine Verifizierung der Ergebnisse kann nicht erfolgen, da dies kein Benchmarktest ist. Unter Bezugnahme der Ergebnisse in [Unterabschnitt 5.3.4](#) ist jedoch anzunehmen, dass die Berechnung mit der vorgestellten Netzfeinheit nicht mit einer hohen Genauigkeit behaftet sind.

6. Fazit und Ausblick

Zielsetzung der vorliegenden Arbeit war die Modellierung und Simulation von Konvektionsströmungen im äußeren Erdkern mithilfe der Methode der finiten Elemente. Beginnend mit den Kontinuumsmechanischen Grundlagen und den vorgestellten Materialgleichungen konnte ein idealisiertes, physikalisches Modell aufgestellt werden, welches temperaturinduzierte Dichteunterschiede in der Impulsbilanz berücksichtigte und somit die numerische Berechnung von natürlicher Konvektion ermöglichte. Daraufhin fanden Benchmarktests verschiedener Beispielpunkte statt, die zur Untersuchung der Genauigkeiten der verwendeten Verfahren genutzt wurden. Die Benchmarktests der Nischenströmung und der KÁRMÁNSchen-Wirbelstraße lieferten überzeugende Ergebnisse. Es konnte festgestellt werden, dass die Berechnungen mit den vorgestellten Konfigurationen nur sehr gering von den Benchmarks abwichen.

Allerdings konnte kein zufriedenstellendes Ergebnis in der Verifizierung der temperaturinduzierten Nischenströmung erreicht werden. Der Grund für die teilweise starken Abweichungen der Ergebnisse konnte nicht klar identifiziert werden, jedoch wird vermutlich das für die Berechnung verwendete, grobe Netz entscheidend gewesen sein. Außerdem wurde die anschließende Berechnung der Konvektionsströmungen im äußeren Erdkern aufgrund limitierter technischer Möglichkeiten auf ein zweidimensionales Problem reduziert, wobei die Modellierung des Erdkerns für gewöhnlich dreidimensional erfolgt. Dennoch konnten innerhalb des vereinfachten Modells sehr gute Ergebnisse erzielt werden, die im Rahmen eines qualitativen Vergleichs eine Untersuchung konvektiver Strömungen ermöglichte. Insofern kann die gesetzte Zielsetzung der Arbeit in Anbetracht der Komplexität des Problems und der limitierten technischen Möglichkeiten als erreicht angesehen werden.

Zudem war eine wesentliche Idealisierung des Problems die Vernachlässigung des Magnetfeldes, welche in anschließenden Arbeiten berücksichtigt werden sollte. Daraufauf sollte das erweiterte Modell auf eine dreidimensionale Geometrie übertragen und verifiziert werden. Schließlich stellt die Rotation des inneren Erdkerns einen weiteren, nicht vernachlässigbaren Einflussfaktor auf die Konvektionsströmungen des Erdkerns dar, sodass dies Gegenstand einer weiteren Untersuchung sein könnte.

Abbildungsverzeichnis

1.1. Skizze des inneren Aufbaus der Erde	2
2.1. Skizze eines materiellen Körpers $V(t)$ und den jeweiligen Bereichen V^\pm , die durch die singuläre Fläche A geteilt sind. Die Normaleinheitsvektoren auf den Oberflächen ∂V^\pm und der singulären Fläche A sind jeweils mit \mathbf{n} und \mathbf{e} dargestellt.	5
5.1. Skizze der Geometrie des Problems mit den jeweiligen Rändern. Der Ursprung des Koordinatensystems ist mit dem Symbol O gekennzeichnet.	33
5.2. Graphische Darstellung der Stufen der Verfeinerungen des Netzes.	33
5.3. Graphische Darstellung der Stromlinien des Geschwindigkeitsfeldes, wobei der Betrag der Geschwindigkeit farblich hervorgehoben ist.	35
5.4. Graphen zur Validierung der horizontalen Geschwindigkeit $v_x(x = 0,5)$ der Nischenströmung für verschiedene REYNOLDS-Zahlen. . .	36
5.5. Vergleich der berechneten Residuen des jeweiligen Iterationsschrittes. Die Verfahren, die verglichen werden, sind der <i>Hybrid-Solver</i> und das NEWTON-RAPHSON-Verfahren bzgl. verschiedener REYNOLDS-Zahlen. Die vertikal verlaufenden, gestrichelten Trennlinien weisen durch ihre Farbe und Position auf die in den <i>Hybrid-Solvern</i> stattgefundenen Wechsel von der PICARD-Iteration zum NEWTON-RAPHSON-Verfahren hin.	37
5.6. Graphische Darstellungen des Strömungskanals in dimensionsbehafteter und dimensionsloser Form. Der Ursprung des Koordinatensystems ist mit dem Symbol O gekennzeichnet.	38
5.7. Vernetzung des Strömungskanals.	40
5.8. Graphische Darstellung der einheitlichen Geschwindigkeitsvektoren nach 2, 4, 5, 6, 7 und 8 Sekunden zur Visualisierung des Strömungsverhaltens.	43
5.9. Vergleich der Widerstands- und Auftriebsbeiwerte.	44
5.10. Graphische Darstellung der temperaturinduzierten Nischenströmung. Das Symbol O kennzeichnet den Ursprung des Koordinatensystems.	46

5.11. Vergrößerte Darstellung der finiten Elemente mit entsprechender Kantenlänge für die Berechnung der temperaturinduzierten Nischenströmung.	48
5.12. Graphische Darstellung des Temperatur- und Geschwindigkeitsfeldes der temperaturinduzierten Nischenströmung zum Zeitpunkt $t = 350$. Zusätzlich sind in (a) die Isothermen im Temperaturfeld abgebildet und in (b) der Betrag des jeweiligen Geschwindigkeitsvektors farblich hervorgehoben.	52
5.13. Verlauf der Temperatur T_1 am Validierungspunkt 1.	53
5.14. Verlauf von $\varepsilon_{12} = T_1 + T_2$ über den gesamten Zeitraum.	54
5.15. Skizze der zweidimensionalen Geometrie des äußeren Erdkerns. Der Ursprung O ist im Zentrum des Erdkerns.	56
5.16. Graphische Darstellung der Temperaturfelder zum dimensionslosen Zeitpunkt $t = 150$. Zusätzlich sind die Isothermen und die Vernetzung der Geometrie abgebildet.	58
5.17. Verlauf der Temperaturen entlang des Radius im stationären Zustand.	59
5.18. Graphische Darstellung der Temperaturfelder mit Isothermen zu den dimensionslosen Zeitpunkten $t = 20$ und $t = 12$. Die RAYLEIGH-Zahlen liegen jeweils bei 10^5 und 10^6	60
5.19. Graphische Darstellung des Geschwindigkeitsfeldes der Berechnung mit $Ra = 10^6$ zum dimensionslosen Zeitpunkt $t = 30$. Die Beträge der jeweiligen Geschwindigkeitsvektoren sind farblich visualisiert.	60
5.20. Zeitlicher Verlauf von T_1 für $Ra = 10^5$ und $Ra = 10^6$	61

Tabellenverzeichnis

5.1. Konfigurationen der Freiheitsgrade für die Berechnung der Nischenströmung.	34
5.2. Konfiguration der Freiheitsgrade für die Berechnung der KÁRMÁNsche-Wirbelstraße.	40
5.3. Vergleich der maximalen Beiwerte in der Berechnung der KÁRMÁNschen-Wirbelstraße.	42
5.4. Konfiguration der Freiheitsgrade für die temperaturinduzierte Nischenströmung.	48
5.5. Dimensionslose Koordinaten der Validierungspunkte.	49
5.6. Vergleich der Ergebnisse mit den Referenzwerten bzgl. des Validierungspunktes 1.	52
5.7. Vergleich von \overline{Nu} , Nu' , Δp_{14} und $\Delta p'_{14}$ mit den Referenzwerten.	53
5.8. Vergleich von $\overline{\omega}_{\text{rms}}$ und ω'_{rms} mit der Referenz.	54
5.9. Konfiguration der Freiheitsgrade für das Problem der Konvektionsströmungen im äußeren Erdkern.	56
5.10. Materialeigenschaften des äußeren Erdkerns, vgl. etwa [Anderson 1989], S. 68.	57

Literaturverzeichnis

- [Ahmed u. Rubino 2018] AHMED, N. ; RUBINO, S.: Numerical comparisons of finite element stabilized methods for high Reynolds numbers vortex dynamics simulations. (2018), Apr. – <https://arxiv.org/abs/1804.03009v1>
- [Alnæs u. a. 2015] ALNÆS, Martin ; BLECHTA, Jan ; HAKE, Johan ; JOHANSSON, August ; KEHLET, Benjamin ; LOGG, Anders ; RICHARDSON, Chris ; RING, Johannes ; ROGNES, Marie ; WELLS, Garth: The FEniCS Project Version 1.5. In: *Archive of Numerical Software* 3 (2015), Nr. 100. – ISSN 2197–8263. – doi: <http://dx.doi.org/10.11588/ans.2015.100.20553>
- [Anderson 1989] ANDERSON, D. L.: *Theory of the Earth*. Blackwell Scientific Publication, 1989. – ISBN 0–86542–335–0
- [Ascher u. a. 1995] ASCHER, Uri M. ; RUUTH, Steven J. ; WETTON, Brian T. R.: Implicit-Explicit Methods for Time-Dependent Partial Differential Equations. In: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 32 (1995), Nr. 3. – ISSN 0036–1429. – DOI: <http://dx.doi.org/10.1137/0732037>
- [Boussinesq 1897] BOUSSINESQ, J. V.: *Théorie de l'écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides dans les lits rectilignes a grande section*. Paris : Gauthier-Villars et fils, 1897
- [Buffett 2014] BUFFETT, Bruce: Geomagnetic fluctuations reveal stable stratification at the top of the Earth's core. In: *Nature* 507 (2014), S. 484–487. – DOI: <http://dx.doi.org/10.1038/nature13122>
- [Chandrasekhar 1981] CHANDRASEKHAR, S.: *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Dover Publications, 1981 (Dover Books on Physics Series). https://books.google.de/books?id=oU_-6ikmidoC. – ISBN 9780486640716
- [Christon u. a. 2002] CHRISTON, Mark A. ; GRESHO, Philip M. ; SUTTON, Steven B.: Computational predictability of time-dependent natural convection flows in enclosures (including a benchmark solution). In: *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 40 (2002), Nr. 8, S. 953–980. – DOI: <http://dx.doi.org/10.1002/flid.395>
- [Cox u. a. 1964] COX, Allan ; DOELL, Richard R. ; DALRYMPLE, G. B.: Reversals of the Earth's Magnetic Field. In: *In Science , Vol. 144, Issue 3626, pp. 1537-1543* (1964). – DOI: <http://dx.doi.org/10.1126/science.144.3626.1537>

- [De Vahl Davis u. Jones 1983] DE VAHL DAVIS, G. ; JONES, I. P.: Natural convection in a square cavity: A comparison exercise. In: *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 3 (1983), Nr. 3, S. 227–248. – DOI: <http://dx.doi.org/10.1002/flid.1650030304>
- [Elman u. a. 2014] ELMAN, H. C. ; SILVESTER, D. J. ; WATHEN, A. J.: *Finite Elements and Fast Iterative Solvers: with Applications in Incompressible Fluid Dynamics*. Oxford : Oxford University Press, 2014 (second edition). – ISBN 978-0-19-852867-8. – DOI: <http://dx.doi.org/10.1017/S0022112006220561>
- [FeatFlow] *DFG flow around cylinder benchmark 2D-3, fixed time interval (Re=100)*. http://www.featflow.de/en/benchmarks/cfdbenchmarking/flow/dfg_benchmark3_re100.html. – Eingesehen am 30.09.2018
- [Ghia u. a. 1982] GHIA, U ; GHIA, K. N. ; SHIN, C. T.: High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method. In: *Journal of Computational Physics* 48 (1982), Jan, S. 387–411. – DOI: [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(82\)90058-4](https://doi.org/10.1016/0021-9991(82)90058-4)
- [Glatzmaiers u. Roberts 1995] GLATZMAIERS, Gary A. ; ROBERTS, Paul H.: A three-dimensional self-consistent computer simulation of a geomagnetic field reversal. In: *Nature, Vol. 377, pp. 203-209* (1995). – DOI: <http://dx.doi.org/10.1038/377203a0>
- [Herwig 2006] HERWIG, H.: *Strömungsmechanik - Eine Einführung in die Physik und die mathematische Modellierung von Strömungen*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006. – ISBN 978-3-662-10108-7. – DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-10107-0>
- [Hollerbach 1996] HOLLERBACH, Rainer: On the theory of the geodynamo. In: *Institute of Geophysics and Planetary Physics, Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, NM 87545, USA* (1996). – DOI: [https://doi.org/10.1016/S0031-9201\(96\)03185-8](https://doi.org/10.1016/S0031-9201(96)03185-8)
- [John 2004] JOHN, V.: Reference values for drag and lift of a two-dimensional time-dependent flow around a cylinder. In: *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 44 (2004), Feb, S. 777–788. – DOI: <https://doi.org/10.1002/flid.679>
- [Lambert 1992] LAMBERT, J. D.: *Numerical Methods for Ordinary Differential Systems: The Initial Value Problem*. New York : John Wiley and Sons, 1992. – ISBN 0-471-92990-5
- [Le Quéré 1991] LE QUÉRÉ, P.: Accurate solutions to the square thermally driven cavity at high Rayleigh number. In: *Computers & Fluids* 20 (1991), Nr. 1, S. 29 – 41. – ISSN 0045-7930. – DOI: [https://doi.org/10.1016/0045-7930\(91\)90025-D](https://doi.org/10.1016/0045-7930(91)90025-D)

-
- [Markatos u. Pericleous 1984] MARKATOS, N.C. ; PERICLEOUS, K.A.: Laminar and turbulent natural convection in an enclosed cavity. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 27 (1984), Nr. 5, S. 755 – 772. – ISSN 0017–9310. – DOI: [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(84\)90145-5](https://doi.org/10.1016/0017-9310(84)90145-5)
- [Mayne u. a. 2000] MAYNE, David A. ; USMANI, Asif S. ; CRAPPER, Martin: h-adaptive finite element solution of high Rayleigh number thermally driven cavity problem. In: *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow* 10 (2000), Nr. 6, S. 598–615. – DOI: <https://doi.org/10.1108/09615530010347187>
- [Moffatt 1964] MOFFATT, H. K.: Viscous and resistive eddies near a sharp corner. In: *Journal of Fluid Mechanics* 18 (1964), Nr. 1, S. 1–18. – DOI: <http://dx.doi.org/10.1017/S0022112064000015>
- [Müller 2011] MÜLLER, W. H.: *Streifzüge durch die Kontinuumstheorie*. Berlin : Springer, 2011. – ISBN 978–3–642–19869–4. – DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-19870-0>
- [Prandtl u. a. 1990] PRANDTL, Ludwig ; OSAWATITISCH, Klaus ; WIEGHARDT, Karl: *Führer durch die Strömungslehre*. Braunschweig : Vieweg, 1990 (9. Auflage). – ISBN 3–528–19–28209–6
- [Russel u. a. 2006] RUSSEL, C. T. ; ROBERTS, P. H. ; YU, Z. J.: On the 60-year signal from the core. In: *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics, Vol. 101, No. 1, February 2007, 11–35* (2006). – DOI: <https://doi.org/10.1080/03091920601083820>
- [Schäfer u. a. 1996] SCHÄFER, M. ; S., Turek ; F., Durst ; E., Krause ; R., Rannacher: Recent Benchmark Computations of Laminar Flow Around a Cylinder. In: *Hirschel E.H. (eds) Flow Simulation with High-Performance Computers II. Notes on Numerical Fluid Mechanics (NNFM)* (1996). – DOI: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-322-89849-4_39
- [Spurk u. Aksel 2006] SPURK, J. H. ; AKSEL, Nuri: *Strömungslehre: Einführung in die Theorie der Strömungen*. Berlin : Springer, 2006 (6. Auflage). – ISBN 978–3–540–26293. – DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/3-540-29712-X>
- [Tritton 1988] TRITTON, D. J.: *Physical Fluid Dynamics*. Oxford : Oxford University Press, 1988 (second edition). – ISBN 978–0–19–854493–7. – DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/978-94-009-9992-3>
- [de Wijs u. a. 1998] WIJS, Gilles A. ; KRESSE, Georg ; VOČADLO, Lidunka ; DOBSON, David ; ALFÈ, Dario ; GILLAN, Michael J. ; PRICE, Geoffrey D.: The viscosity of liquid iron at the physical conditions of the Earth’s core. In: *Journal of Fluid Mechanics* 392 (1998), S. 805–807. – DOI: <http://dx.doi.org/10.1038/33905>

[Xin u. Le Quéré 2002] XIN, Shihe ; LE QUÉRÉ, Patrick: An extended Chebyshev pseudo-spectral benchmark for the 8:1 differentially heated cavity. In: *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 40 (2002), Nr. 8, S. 981–998. – DOI: <http://dx.doi.org/10.1002/flid.399>

A. Quelltexte

A.1. Stationäre Nischenströmung mit dem Hybrid-Solver

```
1 #!/usr/bin/env python2
2 # -*- coding: utf-8 -*-
3 """
4 #####
5 ##           Solving steady state Navier-Stokes-Equation      ##
6 ##                               with Hybrid-Solver            ##
7 ##           (Picard-Update + Newton's method)                ##
8 #####
9 """
10 import dolfin as dln
11 from dolfin import inner, grad, div, derivative
12 import matplotlib.pyplot as plt
13 import numpy as np
14 #====
15 from matplotlib import rc
16 rc('font',**{'family':'sans-serif','sans-serif':['Helvetica']})
17 rc('text', usetex=True)
18 #====
19 # dimensionless constant
20 reynolds = 400. # reynolds-zahl
21 Re = dln.Constant(reynolds)
22 validierung = False # validierungsplot erstellen: False/True
23 #====
24 print "___"
25 print "Reynolds number: ", reynolds
26 print "___"
27 print "Validierung?: ", validierung
28 #====
29 # mesh definition & refinement
30 mesh = dln.Mesh("square_mod.xml")
31 for x in range(6):
32     mesh = dln.refine(mesh)
33 space_dim = mesh.topology().dim()
34 ncell = mesh.num_cells()
35 h_min = mesh.hmin()
36 #====
37 # element and functionSpace definition
38 cell = mesh.ufl_cell()
39 # Taylor-Hood element
40 P1 = dln.VectorElement("CG", cell, 2)
41 P2 = dln.FiniteElement("CG", cell, 1)
```

```

42 mixed_space = P1 * P2
43 W = dln.FunctionSpace(mesh, mixed_space)
44 ndofs = W.dim()
45 ndofs_velocity = W.sub(0).dim()
46 ndofs_pressure = W.sub(1).dim()
47 #
48 # subdomains for boundaries
49 gamma_left = \
50 dln.CompiledSubDomain("near(x[0], 0.) && on_boundary")
51 gamma_right = \
52     dln.CompiledSubDomain("near(x[0], 1.) && on_boundary")
53 gamma_top = dln.CompiledSubDomain("near(x[1], 1.) && on_boundary")
54 gamma_bottom = \
55     dln.CompiledSubDomain("near(x[1], 0.) && on_boundary")
56 facet_marker = dln.MeshFunction("size_t", mesh, space_dim - 1)
57 facet_marker.set_all(0)
58 gamma_left.mark(facet_marker, 1)
59 gamma_right.mark(facet_marker, 1)
60 gamma_bottom.mark(facet_marker, 1)
61 gamma_top.mark(facet_marker, 2)
62 #
63 # definition of volume / surface element
64 dA = dln.Measure("ds", domain = mesh,
65     subdomain_data = facet_marker)
66 dV = dln.Measure("dx", domain = mesh,
67     subdomain_data = facet_marker)
68 #
69 # trial and testfunction
70 (v, q) = dln.TestFunctions(W)
71 (du, dp) = dln.TrialFunctions(W)
72 w = dln.Function(W)
73 u, p = dln.split(w)
74 #
75 # define linearized weak form / variational problem
76 f = dln.Constant((0.0, 0.0))
77 F = ((1./Re) * inner(grad(u), grad(v)) + inner(grad(u)*u, v) \
78     - p*div(v) - q*div(u))*dV - inner(f, v)*dV
79 #
80 # Picard's Jacobian
81 Jpicard = ((1./Re)*inner(grad(du), grad(v)) + inner(grad(du)*u, v) \
82     - dp*div(v) - q*div(du))*dV
83 #
84 #boundary conditions
85 no_slip = [0, 0]
86 slip = [1.0, 0]
87 no_slip = dln.DirichletBC(W.sub(0), no_slip, facet_marker, 1)
88 slip = dln.DirichletBC(W.sub(0), slip, facet_marker, 2)
89 bcs = [no_slip, slip]
90 #
91 # hybrid's first solver: picard's iteration
92 problem = dln.NonlinearVariationalProblem(F, w, bcs, J=Jpicard)
93 picard_solver = dln.NonlinearVariationalSolver(problem)
94 picard_solver.parameters["newton_solver"]\

```

```
95 ["relative_tolerance"] = 1e-5
96 picard_solver.parameters["newton_solver"]\
97 ["absolute_tolerance"] = 1e-5
98 picard_solver.parameters["newton_solver"]\
99 ["maximum_iterations"] = 100
100 picard_solver.solve()
101 #
102 # hybrid's second solver: newton's method
103 J = derivative(F, w)
104 problem = dln.NonlinearVariationalProblem(F, w, bcs, J=J)
105 newton_solver = dln.NonlinearVariationalSolver(problem)
106 newton_solver.parameters["newton_solver"]\
107 ["relative_tolerance"] = 1e-11
108 newton_solver.parameters["newton_solver"]\
109 ["absolute_tolerance"] = 1e-12
110 newton_solver.parameters["newton_solver"]\
111 ["maximum_iterations"] = 40
112 newton_solver.solve()
113 (usol, psol) = w.split()
114 #
115 #
116 # post-processing
117 #
118 y = np.linspace(0,1,100)
119 x = 0.5
120 usol_x = [0.] * len(y)
121 i=0
122 while i < len(y):
123     usol_x[i] = usol(np.array([x, y[i]]))[0]
124     i+=1
125 #
126 # reference values ghia et al.
127 y_ghia = [0., 0.0547, 0.0625, 0.0703, 0.1016, 0.1719, 0.2813,
128           0.4531, 0.5000, 0.6172, 0.7344, 0.8516, 0.9531, 0.9609,
129           0.9688, 0.9766, 1.0000]
130 ghia_400 = [0.0, -0.08186, -0.09266, -0.10338, -0.14612, -0.24299,
131            -0.32726, -0.17119, -0.11477, 0.02135, 0.16256, 0.29093,
132            0.55892, 0.61756, 0.68439, 0.75837, 1.0000]
133 ghia_1000 = [0.00000, -0.18109, -0.20196, -0.22220, -0.29730,
134             -0.38289, -0.27805, -0.10648, -0.06080, 0.05702,
135             0.18719, 0.33304, 0.46604, 0.51117, 0.57492, 0.65928,
136             1.00000]
137 ghia_5000 = [0.00000, -0.41165, -0.42901, -0.43643, -0.40435,
138             -0.33050, -0.22855, -0.07404, 0.03039, 0.081832,
139             0.20087, 0.33556, 0.46036, 0.45992, 0.46120, 0.48223,
140             1.00000]
141 #
142 # comparison
143 if validierung:
144     list_reynolds = [400, 1000, 5000]
145     if int(reynolds) == list_reynolds[0] or int(reynolds) ==
146        list_reynolds[1] \
147        or int(reynolds) == list_reynolds[2]:
```

```

148     list_validierung = [ghia_400, ghia_1000, ghia_5000]
149     for i in range(3):
150         if list_reynolds[i] == int(reynolds):
151             ghia_ref = list_validierung[i]
152             break
153     plt.rc('text', usetex=True)
154     plt.rc('font', family='serif')
155     plt.rcParams['text.latex.preamble']=\
156         [r"\usepackage{amsmath}"]
157     fig = plt.figure()
158     ax = fig.add_subplot(1,1,1)
159     ax.plot(usol_x, y, label = r'\textit{Hybrid-Solver}')
160     ax.plot(ghia_ref, y_ghia, "o", color='red', \
161            label='Referenz [Ghia u. a. 1982]')
162     ax.set_xlabel(r'\boldsymbol{v} (x = 0{,}5)$',
163                fontsize = 16)
164     ax.set_ylabel('y-Koordinate', fontsize = 16)
165     ax.grid(True)
166     ax.legend(loc=5)
167     fig.savefig('Validierungsplots/
168                ref_ghia_{0:d}_hybrid.pdf'.format(list_reynolds[i]),
169                bbox_inches='tight')
170     plt.close(fig)
171     else:
172         print ""
173         print "Validierung nicht moeglich."
174
175 #-----
176 pvd_velocity = dln.File("results/Re_{0:d}/
177                        solution_velocity_Re_{0:d}_{1}.pvd".format(int(reynolds),
178                        "FEniCS"))
179 pvd_pressure = dln.File("results/Re_{0:d}/
180                        solution_pressure_Re_{0:d}_{1}.pvd".format(int(reynolds),
181                        "FEniCS"))
182 pvd_velocity << usol
183 pvd_pressure << psol

```

A.2. Instationäre Kármánsche-Wirbelstraße mit dem SBDF-Verfahren

```

1  #!/usr/bin/env python2
2  # -*- coding: utf-8 -*-
3  import dolfin as dln
4  from dolfin import inner, grad, div, dot
5  dln.parameters["form_compiler"]["cpp_optimize"] = True
6  #-----
7  v_ref = 1.
8  l_ref = 0.1
9  rho_ref = 1.
10 mu_ref = 0.001

```

```
11 nu = mu_ref/rho_ref
12 t_ref = l_ref/v_ref
13 p_ref = rho_ref*v_ref**2
14 A_ref = dln.pi * (l_ref/2. )**2
15 #
16 # dimensionless constants
17 reynolds = v_ref*l_ref/nu
18 #
19 # ufl constants
20 Re = dln.Constant(reynolds)
21 #
22 print "-" * 15 + " IMEX scheme for Navier-Stokes flow " + "-" * 15
23 print "reynolds number: ", reynolds, ", dim = [1]"
24 print "___"
25 #
26 cylinder_id = 100
27 left_id = 101
28 wall_id = 102
29 right_id = 103
30 #
31 # mesh definition & refinement
32 mesh = dln.Mesh("karman.xml")
33 facet_marker = dln.MeshFunctionSizet(mesh, \
34                                     "karman_facet_region.xml")
35 space_dim = mesh.topology().dim()
36 ncell = mesh.num_cells()
37 #
38 def integrateFluidStress(v, p, nu, space_dim):
39     if space_dim == 2:
40         cd_integral = -20.*(nu*v_ref*(1./l_ref**2)
41                             * inner(dln.nabla_grad(v),
42                                     dln.nabla_grad(vd))
43                                     + v_ref**2 * (1./l_ref)*inner(grad(v)*v, vd)
44                                     - p_ref *(1./l_ref)*p*dln.div(vd))*dV
45         cd = l_ref**2 * dln.assemble(cd_integral)
46         cl_integral = -20.*(nu*v_ref*(1./l_ref**2)
47                             *inner(dln.nabla_grad(v),
48                                     dln.nabla_grad(vl))
49                                     + v_ref**2 * (1./l_ref)* inner(grad(v)*v, vl)
50                                     - p_ref *(1./l_ref)* p*dln.div(vl))*dV
51         cl = l_ref**2 * dln.assemble(cl_integral)
52     else:
53         raise ValueError("space dimension unequal 2")
54     return cd, cl
55 #
56 # minimal mesh length
57 h_min = mesh.hmin()
58 # time step
59 delta_t = 1./8000.
60 dt = dln.Constant(delta_t)
61 #
62 # list initializing for post-processing
63 t_list = []
```

```

64 iter_list = []
65 drag_coeff_list = []
66 lift_coeff_list = []
67 #
68 # element and function space definition
69 cell = mesh.ufl_cell()
70 # taylor-hood element
71 elemV = dln.VectorElement("CG", cell, 2)
72 elemP = dln.FiniteElement("CG", cell, 1)
73 mixedElem = dln.MixedElement([elemV, elemP])
74 Wh = dln.FunctionSpace(mesh, mixedElem)
75 ndofs = Wh.dim()
76 ndofs_velocity = Wh.sub(0).dim()
77 ndofs_pressure = Wh.sub(1).dim()
78 #
79 # function space for validation of karman vortex street
80 Vh = dln.FunctionSpace(mesh, Wh.sub(0).ufl_element())
81 # function for drag coefficient
82 vd = dln.Function(Vh) # zero everywhere!
83 vdBc = dln.DirichletBC(Vh, dln.Constant((1.,0.)), facet_marker,
84                       cylinder_id)
85 vdBc.apply(vd.vector()) # set values on cylinder mantle
86 # function for lift coefficient
87 vl = dln.Function(Vh) # zero everywhere!
88 vlBc = dln.DirichletBC(Vh, dln.Constant((0.,1.)), facet_marker,
89                       cylinder_id)
90 vlBc.apply(vl.vector()) # set values on cylinder mantle
91 #
92 # definition of volume / surface element
93 dA = dln.Measure("ds", domain = mesh,
94                subdomain_data = facet_marker)
95 dV = dln.Measure("dx", domain = mesh)
96 #
97 # boundary conditions
98 n = dln.FacetNormal(mesh)
99 null_vector = dln.Constant((0.0, 0.0))
100 # inlet velocity
101 v_inlet = dln.Expression(
102     ("4.0 * U0* fabs(sin(pi*t*t_ref/8))*x[1] * (H - x[1]) / \
103     pow(H, 2)", "0.0"), degree=2, H=4.1, U0=1.5, t=0., t_ref = 0.1)
104 # inlet bc
105 v_bc1 = dln.DirichletBC(Wh.sub(0), v_inlet, facet_marker, left_id)
106 # wall no slip
107 v_bc2 = dln.DirichletBC(Wh.sub(0), null_vector, facet_marker,
108                       wall_id)
109 # circle no slip
110 v_bc3 = dln.DirichletBC(Wh.sub(0), null_vector, facet_marker,
111                       cylinder_id)
112 # collection of bcs
113 bcs = [v_bc1, v_bc2, v_bc3]
114 #
115 # trial and test function
116 (del_v, del_p) = dln.TestFunctions(Wh)

```

```
117 (dv, dp) = dln.TrialFunctions(Wh)
118 #
119 # solution functions
120 sol = dln.Function(Wh)
121 sol0 = dln.Function(Wh)
122 sol00 = dln.Function(Wh)
123 v0, p0 = dln.split(sol0)
124 v00, p00 = dln.split(sol00)
125 #
126 # define auxiliary operators
127 def a_operator(phi, psi):
128     return inner(grad(phi), grad(psi)) / Re * dV
129 def b_operator(phi, psi):
130     return div(phi) * psi * dV
131 def c_operator(phi, chi, psi):
132     return dot(grad(chi)*phi, psi) * dV
133 #
134 # ATTENTION: beta is called c in Ascher(1995)
135 beta = 0.
136 gamma = 1.
137 # coefficients
138 a = [dln.Constant(gamma + 0.5),
139      dln.Constant(gamma - 0.5),
140      dln.Constant(2. * gamma)]
141 b = [None,
142      dln.Constant(gamma),
143      dln.Constant(gamma + 1.0)]
144 c = [dln.Constant(gamma + beta / 2.),
145      dln.Constant(beta / 2.0),
146      dln.Constant(1. - gamma - beta)]
147 #
148 two = dln.Constant(2.)
149 half = dln.Constant(1./2.)
150 three_half = dln.Constant(3./2.)
151 #
152 # define linear variational problem
153 lhs = three_half / dt * dot(dv, del_v) * dV \
154     + a_operator(dv, del_v) \
155     + two * c_operator(v0, dv, del_v) \
156     - c_operator(v00, dv, del_v) \
157     - b_operator(del_v, dp) \
158     - b_operator(dv, del_p)
159 rhs = \
160     two / dt * dot(v0, del_v) * dV \
161     - half / dt * dot(v00, del_v) * dV
162 #
163 pvd_velocity = dln.File("results_{1}/Re_{0:d}/
164                       solution_velocity_Re_{0:d}.pvd".\
165                       format(int(reynolds), "FEniCS"))
166 pvd_pressure = dln.File("results_{1}/Re_{0:d}/
167                       solution_pressure_Re_{0:d}.pvd".\
168                       format(int(reynolds), "FEniCS"))
169 #
```

```

170 # time loop
171 dln.tic()
172 t = 0.
173 cnt = 0
174 n_steps = 5000
175 t_end = 80.
176 while t < t_end: #and cnt <= n_steps:
177     problem = dln.LinearVariationalProblem(lhs, rhs, sol, bcs=bcs)
178     solver = dln.LinearVariationalSolver(problem)
179     solver.solve()
180     v, p = sol.split()
181     if cnt % 3200 == 0:
182         print "t = {0:6.4f}".format(t)
183         pvd_velocity << (v, t)
184         pvd_pressure << (p, t)
185     cd, cl = integrateFluidStress(v, p, nu, space_dim)
186     drag_coeff_list.append(cd)
187     lift_coeff_list.append(cl)
188     iter_list.append(cnt)
189     t_dim = t*t_ref
190     t_list.append(t_dim)
191     # update for next iteration
192     sol0.assign(sol0)
193     sol0.assign(sol)
194     t += delta_t
195     v_inlet.t += delta_t
196     cnt += 1
197 print 'total simulation time in seconds: ', dln.toc()
198 #=====
199 import numpy as np
200 header = "0.iteration 1.t in s 2.drag_coeff 3.lift_coeff"
201 np.savetxt('coeff_comp_8s_re{0}_imex.gz'.format(int(reynolds)), \
202           np.column_stack((iter_list, t_list, drag_coeff_list, \
203                             lift_coeff_list)), fmt='%1.4e', \
204                             header = header)

```

A.3. Instationäre temperaturinduzierte Nischenströmung mit dem SBDF-Verfahren

```

1 #!/usr/bin/env python2
2 # -*- coding: utf-8 -*-
3 import dolfin as dln
4 from dolfin import inner, grad, div, dot
5 import numpy as np
6 import matplotlib.pyplot as plt
7 dln.parameters["form_compiler"]["cpp_optimize"] = True
8 comm = dln.mpi_comm_world()
9 mpi_comm = dln.mpi_comm_world()
10 mpi_rank = dln.MPI.rank(mpi_comm)
11 print mpi_rank

```



```

12 #
13 # definition of auxillary functions
14 # define function for calculation of nusselt number
15 def nusselt_fun(T, wall):
16     H = dln.assemble(1. * dA(1))
17     nusselt = dln.assemble(abs(T.dx(0)) * dA(wall)) / H
18     return nusselt
19 # define function for calculation of vorticity
20 def vorticity_fun(v):
21     omega = v[1].dx(0) - v[0].dx(1)
22     omega_metric = dln.sqrt(dln.assemble(\
23         dln.Constant(1./(2.*A)) * omega**2 * dV))
24     return omega_metric
25 # append values to lists for post processor
26 def append_fun(v, p, T):
27     # time
28     t_list.append(t)
29     # save values at time history point 1
30     vx_list1.append(v(np.array(point1))[0])
31     vy_list1.append(v(np.array(point1))[1])
32     T_list1.append(T(np.array(point1)))
33     p_list1.append(p(np.array(point1)))
34     # pressure differences
35     p_diff_list14.append(p(np.array(point1)) - p(np.array(point4)))
36     p_diff_list51.append(p(np.array(point5)) - p(np.array(point1)))
37     p_diff_list35.append(p(np.array(point3)) - p(np.array(point5)))
38     # average velocity metric
39     v_metric_list.append(dln.sqrt(kin_e))
40     # skewness metric
41     skew_metric_list12.append(T(np.array(point1))
42         + T(np.array(point2)))
43     skew_metric_vx_list12.append(v(np.array(point1))[0]
44         + v(np.array(point2))[0])
45     # average vorticity metric
46     omega_metric_list.append(omega_metric)
47     # nusselt lists
48     nusselt_left_list.append(nusselt_left)
49     nusselt_right_list.append(nusselt_right)
50     # list of iteration
51     iteration_list.append(cnt)
52     return
53 #
54 # dimensionless constants
55 rayleigh = 3.4e5
56 prandtl = 0.71
57 #
58 # ufl constants
59 Ra = dln.Constant(rayleigh)
60 Pr = dln.Constant(prandtl)
61 #
62 # initial time step
63 delta_t = 1e-3
64 dt = dln.Constant(delta_t)

```

```

65 #
66 t = 0.
67 t_end = 350.
68 cnt = 0
69 #
70 # mesh definition and refinement
71 mesh = dln.RectangleMesh(dln.Point(0, 0), dln.Point(1, 8), 25, 100, "
    right")
72 space_dim = mesh.topology().dim()
73 n_cells = mesh.num_cells()
74 #
75 # element and function space definition
76 cell = mesh.ufl_cell()
77 # taylor-hood element
78 elemV = dln.VectorElement("CG", cell, 2)
79 elemP = dln.FiniteElement("CG", cell, 1)
80 elemT = dln.FiniteElement("CG", cell, 1)
81 mixedElem = dln.MixedElement([elemV, elemP, elemT])
82 Wh = dln.FunctionSpace(mesh, mixedElem)
83 ndofs = Wh.dim()
84 ndofs_velocity = Wh.sub(0).dim()
85 ndofs_pressure = Wh.sub(1).dim()
86 ndofs_temperature = Wh.sub(2).dim()
87 print "DOFs velocity : ", ndofs_velocity, "DOFs pressure : ",
    ndofs_pressure, \
88     "DOFs temperature : ", ndofs_temperature
89 vortex_space = dln.FunctionSpace(mesh, "DG", 1)
90 #
91 # subdomains for boundaries
92 gamma_left = dln.CompiledSubDomain("near(x[0], 0.) && on_boundary")
93 gamma_right = dln.CompiledSubDomain("near(x[0], 1.) && on_boundary"
    )
94 gamma_top = dln.CompiledSubDomain("near(x[1], 8.) && on_boundary")
95 gamma_bottom = dln.CompiledSubDomain("near(x[1], 0.) && on_boundary"
    )
96 # marking subdomains
97 facet_marker = dln.MeshFunction("size_t", mesh, space_dim - 1)
98 facet_marker.set_all(0)
99 gamma_left.mark(facet_marker, 1)
100 gamma_right.mark(facet_marker, 2)
101 gamma_top.mark(facet_marker, 3)
102 gamma_bottom.mark(facet_marker, 4)
103 #
104 # boundary conditions
105 null_vector = dln.Constant((0.0, 0.0))
106 temp_left = dln.Constant(0.5)
107 temp_right = dln.Constant(-0.5)
108 # initialize empty list
109 bcs = []
110 # no slip bc on all boundaries
111 bcs.append(dln.DirichletBC(Wh.sub(0), null_vector, facet_marker, 1))
112 bcs.append(dln.DirichletBC(Wh.sub(0), null_vector, facet_marker, 2))
113 bcs.append(dln.DirichletBC(Wh.sub(0), null_vector, facet_marker, 3))

```

```

114 bcs.append(dlfn.DirichletBC(Wh.sub(0), null_vector, facet_marker, 4))
115 # temperature bcs on left and right boundary
116 bcs.append(dlfn.DirichletBC(Wh.sub(2), temp_left, facet_marker, 1))
117 bcs.append(dlfn.DirichletBC(Wh.sub(2), temp_right, facet_marker, 2))
118 #
119 # definition of volume / surface element
120 dA = dlfn.Measure("ds", domain = mesh, subdomain_data = facet_marker
121 )
122 dV = dlfn.Measure("dx", domain = mesh)
123 A = dlfn.assemble(1.*dV) # "volume" or rather area of geometry
124 #n = dlfn.FacetNormal(mesh)
125 #
126 # trial and test function
127 (del_v, del_p, del_T) = dlfn.TestFunctions(Wh)
128 (dv, dp, dT) = dlfn.TrialFunctions(Wh)
129 #
130 # solution functions
131 sol = dlfn.Function(Wh)
132 sol0 = dlfn.Function(Wh)
133 sol00 = dlfn.Function(Wh)
134 v0, p0, T0 = dlfn.split(sol0)
135 v00, p00, T00 = dlfn.split(sol00)
136 #
137 # define auxiliary operators
138 def a_operator(phi, psi):
139     return inner(grad(phi), grad(psi)) * dV
140 def b_operator(phi, psi):
141     return div(phi) * psi * dV
142 def c_operator(phi, chi, psi):
143     return dot(dot(grad(chi), phi), psi) * dV
144 #
145 # ufl constants for SBDF scheme
146 one = dlfn.Constant(1.)
147 two = dlfn.Constant(2.)
148 half = dlfn.Constant(1./2.)
149 three_half = dlfn.Constant(3./2.)
150 # unit vector in direction of y
151 e_y = dlfn.Constant((0., 1.))
152 #
153 # define linear variational problem
154 # momentum equation
155 lhs_momentum = three_half * dot(dv, del_v) * dV \
156     + dt * dlfn.sqrt(Pr/Ra) * a_operator(dv, del_v) \
157     - dt * b_operator(del_v, dp) \
158     - dt * b_operator(dv, del_p)
159 rhs_momentum = two * dot(v0, del_v) * dV \
160     - half * dot(v00, del_v) * dV \
161     - dt * two * c_operator(v0, v0, del_v) \
162     + dt * c_operator(v00, v00, del_v) \
163     + dt * two * T0 * dot(e_y, del_v) * dV \
164     - dt * T00 * dot(e_y, del_v) * dV \
165 # energy equation
166 lhs_energy = three_half * dot(dT, del_T) * dV \

```

```

166         + dt / dln.sqrt(Ra*Pr) * a_operator(dT, del_T)
167 rhs_energy = two * T0 * del_T * dV \
168             - half * T00 * del_T * dV \
169             - dt * two * c_operator(v0, T0, del_T) \
170             + dt * c_operator(v00, T00, del_T)
171 lhs = lhs_momentum + lhs_energy
172 # full problem
173 lhs = lhs_momentum + lhs_energy
174 rhs = rhs_momentum + rhs_energy
175 problem = dln.LinearVariationalProblem(lhs, rhs, sol, bcs=bcs)
176 solver = dln.LinearVariationalSolver(problem)
177 #
178 pvd_velocity = \
179     dln.File("pvd_{0:1.1e}_{1:1.1e}_{2}s/solution_velocity.pvd".\
180             format(int(rayleigh), float(delta_t), int(
181                 t_end)))
182 pvd_pressure = \
183     dln.File("pvd_{0:1.1e}_{1:1.1e}_{2}s/solution_pressure.pvd".\
184             format(int(rayleigh), float(delta_t), int(
185                 t_end)))
186 pvd_temperature = \
187     dln.File("pvd_{0:1.1e}_{1:1.1e}_{2}s/solution_temperature.pvd"
188             .\
189             format(int(rayleigh), float(delta_t), int(
190                 t_end)))
191 #
192 # time history points (post processing)
193 point1 = [0.1810, 7.3700] # [x-coordinate, y-coordinate]
194 point2 = [0.8190, 0.6300]
195 point3 = [0.1810, 0.6300]
196 point4 = [0.8190, 7.3700]
197 point5 = [0.1810, 4.0000]
198 #
199 # initialize lists (post processing)
200 t_list, iteration_list = [], []
201 T_list1, vx_list1, vy_list1, p_list1 = [], [], [], []
202 v_metric_list, skew_metric_list12, omega_metric_list = [], [], []
203 skew_metric_vx_list12 = []
204 p_diff_list14, p_diff_list51, p_diff_list35 = [], [], []
205 nusselt_left_list, nusselt_right_list = [], []
206 #
207 # time loop
208 dln.tic()
209 # n_steps = 10000
210 while t < t_end: #and cnt <= n_steps:
211     # solve linear problem
212     solver.solve()
213     v, p, T = sol.split()
214     # write output
215     if cnt%10 == 0:
216         pvd_velocity << (v, t)
217         pvd_pressure << (p, t)
218         pvd_temperature << (T, t)

```

```

215     if mpi_rank == 0:
216         print "t = {0:6.4f}".format(t)
217         print "Iteration: ", cnt
218     if cnt%1 == 0:
219         kin_e = dln.assemble(dln.Constant(1./(2.*A)) \
220                             * dot(v, v) * dV)
221         if kin_e > 1e12:
222             raise ValueError("Instability occured!")
223         # save values for post processor
224         omega_metric = vorticity_fun(v) # average vorticity metric
225         nusselt_left = nusselt_fun(T=T, wall=1) # left wall nusselt
number
226         nusselt_right = nusselt_fun(T=T, wall=2) # right wall
nusselt number
227         append_fun(v, p, T) # append new values to lists
228     # update for next iteration
229     sol00.assign(sol0)
230     sol0.assign(sol)
231     t += delta_t
232     cnt += 1
233 if mpi_rank == 0:
234     print 'elapsed simulation time in seconds: ', dln.toc()
235 #

```

A.4. Konvektionsströmung im äußeren Erdkern mit dem SBDF-Verfahren

```

1  #!/usr/bin/env python2
2  # -*- coding: utf-8 -*-
3  import dolfin as dln
4  import mshr
5  from dolfin import inner, grad, div, dot
6  import numpy as np
7  #
8  dln.parameters["form_compiler"][ "cpp_optimize" ] = True
9  comm = dln.mpi_comm_world()
10 mpi_comm = dln.mpi_comm_world()
11 mpi_rank = dln.MPI.rank(mpi_comm)
12 print mpi_rank
13 print "The current version of FEniCS is ", dln.dolfin_version()
14 #
15 # time configuration
16 t = 0.
17 t_end = 150.
18 delta_t = 1e-3
19 dt = dln.Constant(delta_t)
20 cnt = 0 # iteration counter
21 cfl = 1.# cfl-number
22 #
23 # dimensionless constants

```

```

24 rayleigh = 1e6
25 prandtl = 0.1
26 #
27 # ufl constants
28 Ra = dln.Constant(rayleigh)
29 Pr = dln.Constant(prandtl)
30 #
31 # mesh creation
32 r_outer = 1. # outer radius
33 r_inner = r_outer/2. # inner radius
34 center = dln.Point(0., 0.)
35 domain = mshr.Circle(center, r_outer) \
36         - mshr.Circle(center, r_inner)
37 mesh = mshr.generate_mesh(domain, 50)
38 space_dim = mesh.topology().dim()
39 n_cells = mesh.num_cells()
40 #
41 # subdomains for boundaries
42 facet_marker = dln.MeshFunction("size_t", mesh, space_dim-1)
43 facet_marker.set_all(0)
44 hmin = mesh.hmin() # length of smallest element
45 # inner circle boundary
46 class InnerCircle(dln.SubDomain):
47     def inside(self, x, on_boundary):
48         tol = hmin/2. # tolerance: half length of smallest element
49         result = abs(dln.sqrt(x[0]**2 + x[1]**2) - r_inner) < tol
50         return result
51 # outer circle boundary
52 class OuterCircle(dln.SubDomain):
53     def inside(self, x, on_boundary):
54         tol = hmin/2. # tolerance: half length of smallest element
55         result = abs(dln.sqrt(x[0]**2 + x[1]**2) - r_outer) < tol
56         return result
57 # mark boundaries
58 gamma_inner = InnerCircle()
59 gamma_inner.mark(facet_marker, 1)
60 gamma_outer = OuterCircle()
61 gamma_outer.mark(facet_marker, 2)
62 # save pvd file
63 dln.File('subdomains.pvd') << facet_marker
64 #
65 # element and function space definition
66 cell = mesh.ufl_cell()
67 # taylor-hood element
68 elemV = dln.VectorElement("CG", cell, 2)
69 elemP = dln.FiniteElement("CG", cell, 1)
70 elemT = dln.FiniteElement("CG", cell, 1)
71 mixedElem = dln.MixedElement([elemV, elemP, elemT])
72 Wh = dln.FunctionSpace(mesh, mixedElem)
73 ndofs = Wh.dim()
74 ndofs_velocity = Wh.sub(0).dim()
75 ndofs_pressure = Wh.sub(1).dim()
76 ndofs_temperature = Wh.sub(2).dim()

```

```

77 print "DOFs velocity : ", ndofs_velocity, "DOFs pressure : ",
      ndofs_pressure, \
78      "DOFs temperature : ", ndofs_temperature
79 vortex_space = dln.FunctionSpace(mesh, "DG", 1)
80 radial_vector_space = dln.FunctionSpace(mesh, elemV)
81 #
82 # boundary conditions
83 null_vector = dln.Constant((0.0, 0.0))
84 temp_inner = dln.Constant(0.5)
85 temp_outer = dln.Constant(-0.5)
86 # initialize empty list
87 bcs = []
88 # no slip bc on all boundaries
89 bcs.append(dln.DirichletBC(Wh.sub(0), null_vector, facet_marker, 1)
90 )
91 bcs.append(dln.DirichletBC(Wh.sub(0), null_vector, facet_marker, 2)
92 )
93 # temperature bcs on left and right boundary
94 bcs.append(dln.DirichletBC(Wh.sub(2), temp_inner, facet_marker, 1))
95 bcs.append(dln.DirichletBC(Wh.sub(2), temp_outer, facet_marker, 2))
96 #
97 # definition of volume / surface element
98 dA = dln.Measure("ds", domain = mesh, subdomain_data = facet_marker
99 )
100 dV = dln.Measure("dx", domain = mesh)
101 A = dln.assemble(1.*dV) # "volume" or rather area of geometry
102 n = dln.FacetNormal(mesh)
103 #
104 # trial and test function
105 (del_v, del_p, del_T) = dln.TestFunctions(Wh)
106 (dv, dp, dT) = dln.TrialFunctions(Wh)
107 #
108 # solution functions
109 sol = dln.Function(Wh)
110 sol0 = dln.Function(Wh)
111 sol00 = dln.Function(Wh)
112 v0, p0, T0 = dln.split(sol0)
113 v00, p00, T00 = dln.split(sol00)
114 #
115 # define auxiliary operators
116 def a_operator(phi, psi):
117     return inner(grad(phi), grad(psi)) * dV
118 def b_operator(phi, psi):
119     return div(phi) * psi * dV
120 def c_operator(phi, chi, psi):
121     return dot(dot(grad(chi), phi), psi) * dV
122 #
123 # ufl-constants for SBDF scheme
124 one = dln.Constant(1.)
125 two = dln.Constant(2.)
126 half = dln.Constant(1./2.)
127 three_half = dln.Constant(3./2.)
128 # unit vector in radial direction

```

```

126 radial_unit = \
127 dlfm.Expression(( '1./sqrt(pow(x[0],2)+pow(x[1],2)) * x[0]',
128                  '1./sqrt(pow(x[0],2)+pow(x[1],2)) * x[1]'), degree=2)
129 e_r = dlfm.interpolate(radial_unit, radial_vector_space)
130 #-----
131 pvd_velocity = \
132     dlfm.File("pvd_{0:1.1e}_{1:1.1e}_{2}s/solution_velocity.pvd".\
133             format(int(rayleigh), float(delta_t), int(t_end)))
134 pvd_pressure = \
135     dlfm.File("pvd_{0:1.1e}_{1:1.1e}_{2}s/solution_pressure.pvd".\
136             format(int(rayleigh), float(delta_t), int(t_end)))
137 pvd_temperature = \
138     dlfm.File("pvd_{0:1.1e}_{1:1.1e}_{2}s/solution_temperature.pvd".\
139             format(int(rayleigh), float(delta_t), int(t_end)))
140 #-----
141 # define linear variational problem
142 # momentum equation
143 lhs_momentum = three_half * dot(dv, del_v) * dV \
144               + dt * dlfm.sqrt(Pr/Ra) * a_operator(dv, del_v) \
145               - dt * b_operator(del_v, dp) \
146               - dt * b_operator(dv, del_p)
147 rhs_momentum = two * dot(v0, del_v) * dV \
148               - half * dot(v00, del_v) * dV \
149               - dt * two * c_operator(v0, v0, del_v) \
150               + dt * c_operator(v00, v00, del_v) \
151               + dt * two * T0 * dot(e_r, del_v) * dV \
152               - dt * T00 * dot(e_r, del_v) * dV
153 # energy equation
154 lhs_energy = three_half * dot(dT, del_T) * dV \
155             + dt / dlfm.sqrt(Ra*Pr) * a_operator(dT, del_T)
156 rhs_energy = two * dot(T0, del_T) * dV \
157             - half * dot(T00, del_T) * dV \
158             - dt * two * c_operator(v0, T0, del_T) \
159             + dt * c_operator(v00, T00, del_T)
160 lhs = lhs_momentum + lhs_energy
161 # full problem
162 lhs = lhs_momentum + lhs_energy
163 rhs = rhs_momentum + rhs_energy
164 problem = \
165     dlfm.LinearVariationalProblem(lhs, rhs, sol, bcs=bcs)
166 solver = dlfm.LinearVariationalSolver(problem)
167 #-----
168 # time loop
169 dlfm.tic()
170 # n_steps = 10000
171 while t < t_end:
172     # solve linear problem
173     solver.solve()
174     v, p, T = sol.split(deepcopy=True)
175     # write output
176     if cnt%1500 == 0:
177         pvd_velocity << (v, t)
178         pvd_pressure << (p, t)

```



```
179     pvd_temperature << (T, t)
180     if mpi_rank == 0:
181         print "t = {0:6.4f}".format(t)
182         #print "Iteration: ", cnt
183     if cnt%200 == 0:
184         v_rms = dln.assemble(dln.Constant(1./(2.*A)) * dot(v, v) *
185                             dV)
186         if kin_e > 1e12:
187             raise ValueError("Instability occured!")
188     # update for next iteration
189     sol0.assign(sol)
190     t += delta_t
191     cnt += 1
192 if mpi_rank == 0:
193     print 'elapsed simulation time in seconds: ', dln.toc()
194 #
```